UNIVERSIDADE DO ESTADO DA BAHIA – UNEB
CAMPUS II – ALAGOINHAS
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA TERRA – DCET
PÓS GRADUAÇÃO *LATO SENSU* EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

ROSANA ALVES DA SILVA GENTIL

ESTRATÉGIAS UTILIZADAS POR ALUNOS DO 7º ANO DE UMA ESCOLA PÚBLICA, AO RESOLVER PROBLEMAS DE PADRÕES MATEMÁTICOS.

Alagoinhas - BA
2017

UNIVERSIDADE DO ESTADO DA BAHIA – UNEB
CAMPUS II – ALAGOINHAS
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA TERRA – DCET
PÓS GRADUAÇÃO *LATO SENSU* EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

ROSANA ALVES DA SILVA GENTIL

ESTRATÉGIAS UTILIZADAS POR ALUNOS DO 7º ANO DE UMA ESCOLA PÚBLICA, AO RESOLVER PROBLEMAS DE PADRÕES MATEMÁTICOS.

Monografia apresentada ao curso de Especialização em Educação Matemática, Universidade do Estado da Bahia - UNEB, Campus II, Departamento de Ciências Exatas e Terra, como requisito para obtenção do título de especialista.
Orientadora: Prof. Drª Grace Dórea Santos Baqueiro

Alagoinhas- BA
2017

FICHA CATALOGRÁFICA

G338e Gentil, Rosana Alves da Silva.

Estratégias utilizadas por alunos do 7º ano de uma escola pública, ao resolver problemas de padrões matemáticos./ Rosana Alves da Silva Gentil – Alagoinhas, 2017.

36f. il.

Trabalho de Conclusão de Curso - (Pós-Graduação Lato Sensu em Educação Matemática) – Universidade do Estado da Bahia. Departamento de Ciências Exatas e da Terra. Colegiado de Matemática. Campus II.

Orientador: Prof.ª Dr.ª Grace Dórea Santos Baqueiro.

Biblioteca do Campus II / Uneb

Bibliotecária: Rosana Cristina de Souza Barretto - CRB: 5/902

ROSANA ALVES DA SILVA GENTIL

ESTRATÉGIAS UTILIZADAS POR ALUNOS DO 7º ANO DE UMA ESCOLA PÚBLICA, AO RESOLVER PROBLEMAS DE PADRÕES MATEMÁTICOS.

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Banca Examinadora da Universidade do Estado da Bahia – UNEB para obtenção do título parcial de Especialista em Matemática.

Alagoinhas, _________de _____________________________de 2017.

Banca Examinadora

____

Prof.ª Dr. ª Grace Dórea Santos Baqueiro
Orientadora

____

Prof.ª Dr. ª Maria de Fatima Costa Leal
Universidade do Estado da Bahia - UNEB

____

Prof.ª Msc.ª Érica Nogueira Macêdo
Universidade do Estado da Bahia - UNEB

Dedico com muito amor e carinho a minha orientadora Grace Baqueiro por todo incentivo, ajuda e principalmente motivação para realização desse trabalho.

AGRADECIMENTOS

Agradeço,

A DEUS, por ter me dado força para concluir esse trabalho e por todas as vezes que pensei que não iria conseguir, uma força maior me incentivava a continuar .

Aos meus pais e meus irmãos, pela grande torcida e pelas “broncas” por ter pensado em desistir.

Ao meu esposo, pelo apoio, pelas palavras de incentivo e principalmente por entender meus momentos de muito stress.

Aos professores da pós-graduação que contribuíram com a continuação da minha formação.

Aos meus colegas por muitos momentos alegres e de muito estudo, em especial Gleicimar e Gustavo.

A minha grande orientadora, Doutora Grace Baqueiro por me dar força em todos os momentos, por sempre me incentivar, por toda compreensão, disponibilidade, paciência e principalmente por me contagiar com a sua alegria em ser professora, para ela vai o meu muito obrigado!

Aos membros da banca Érica e Maria de Fátima, professoras que admiro muito, por terem aceitado o convite.

A todos que de alguma forma contribuiu para esta realização.

Um bom ensino da Matemática forma melhores hábitos de pensamento e habilita o indivíduo a usar melhor a sua inteligência.

Irene de Albuquerque

RESUMO

Esta investigação teve como objetivo analisar as estratégias utilizadas pelos alunos do 7º ano de uma escola estadual frente a um problema de padrão matemático. Esse objetivo se desdobra na seguinte questão de pesquisa: Quais as estratégias utilizadas por alunos do 7º ano da rede estadual de ensino, ao resolver um problema de generalização de padrão matemático? Para tal, utilizamos como referencial teórico os tipos de estratégias de generalização proposto por Barbosa (2009). A pesquisa é do tipo qualitativa, descritiva e de campo. O instrumento para coleta de dados foi uma atividade com perguntas mistas (fechadas e abertas) e foi aplicado na sala de aula, pela pesquisadora que também é a professora dos alunos. Concluímos com a análise das respostas, que houve uma prevalência da estratégia de *contagem*. Mas surgiram também, em menor número, estratégias de *tentativa e erro, termo unidade sem ajuste* e *múltiplo da diferença sem ajuste*. Observamos também, que os alunos, em sua maioria, ficaram no nível da generalização próxima.

Palavras-chaves: Estratégias de generalização. Padrões matemáticos. Pensamento Algébrico. Ensino Fundamental II.

ABSTRACT

This study intends to analyze and answer questions about the strategy that 7th grade students from a public school have taken to solve a mathematical problem. In order to accomplish the aim, the generalization strategies proposed by Barbosa (2009) was adopted as a theoretical background. The methodological procedure was qualitative, descriptive and field survey. The instrument for collecting data was an exercise with mixed questions (open and closed questions). This exercise was applied in the classroom by the researcher, who is the students' teacher. By analyzing the answers it was demonstrated that there was a predominance of counting strategy. But also arose in fewer numbers strategies of *trial and error*, *unit term without adjustment* and *multiple of the difference without adjustment*. It could be also observed that most of the students remained in the level of approximated generalization.

Key words: Strategies of generalizations. Mathematics standard. Algebraic thought. Elementary II School.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Os alunos do ensino fundamental II quando começam a ter contato de maneira formal com os conteúdos algébricos, tendem a apresentar bastante dificuldades em entender essa nova linguagem e, nem sempre essa transição da aritmética para álgebra é bem compreendida pelos mesmos. De acordo com Pereira e Fernandes (2012):

> A aprendizagem da Álgebra envolve saber trabalhar com símbolos de forma significativa, o que não é um processo fácil nem linear. Muitos alunos sentem dificuldades quando tentam dar sentido a uma expressão algébrica ou a uma letra nessa expressão, quando atribuem significados concretos às letras na transição da linguagem natural para a linguagem algébrica e quando tentam escrever simbolicamente uma generalização. (PEREIRA e FERNANDES, 2012, p. 85).

Portanto, é preciso que sejam apresentados aos alunos, os conteúdos algébricos de forma significativa, envolvendo-os em um ambiente de exploração e investigação de situações de aprendizagem, que levem o aluno a reconhecer que representações algébricas permitem expressar generalizações sobre propriedades das operações aritméticas, generalizar regularidades e identificar os significados das letras e utilizar os conhecimentos sobre as operações numéricas e suas propriedades para construir estratégias de cálculo algébrico. (BRASIL, 1998, p.64).

Vale (2011) afirma que a resolução de problema fora dos modelos tradicionais, é um poderoso caminho para envolver os alunos na formalização e explorações de padrões, levando os mesmos a pensar em possibilidades de resoluções, expressar relações entre diversos elementos do padrão e até mesmo generalizar. Pesquisas como a de Barbosa (2009), Pereira e Fernandes (2012) e Trevisane (2013) mostram que os alunos utilizam uma variedade de estratégias para resolver tarefas que envolva padrões.

Com base nesses autores e outros autores, presentes nesta pesquisa, buscamos responder a seguinte questão norteadora: *Quais as estratégias utilizadas por alunos do 7º ano da rede estadual de ensino, ao resolver um problema de generalização de padrão matemático*? Apresentando como objetivo analisar as estratégias utilizadas pelos alunos frente a esse problema, além disso, observar o envolvimento e o interesse dos mesmos diante da atividade.

Desta forma, essa pesquisa aborda no capítulo I a problemática e a revisão de literatura das pesquisas feitas sobre o tema.

O capítulo II apresenta as ideias principais dos referenciais teóricos adotados sobre tipos de estratégias de generalização dos padrões matemáticos.

O capitulo III expõe sobre nossas escolhas metodológicas e os procedimentos adotados. Foi subdividido em quatro subseções. Na primeira apresentamos o local e os sujeitos da pesquisa, na segunda descrevemos a atividade utilizada para coletas de dados, na terceira os como se deu a coleta de dados e, na última, explicamos sobre a técnica que será empregada para a análise dos dados obtidos.

O capítulo IV contempla o resultado da análise das respostas dos alunos, coletados por meio do questionário que intitulamos como *atividade*.

Por fim, no capítulo V, expomos as considerações finais, ressaltando os principais resultados do nosso trabalho.

CAPÍTULO I
PROBLEMÁTICA

Neste capítulo, vamos apresentar os principais motivos pessoais e leituras que contribuíram para a delimitação do tema desta pesquisa. E também, a relevância desta em minha vida acadêmica e profissional.

1.1 Motivação para escolha do tema

Durante minha atuação como docente no ensino fundamental, encontrei desafios para ensinar os conteúdos algébricos, isso me motivou para escolher esse tema. Além disso, eram notórias as dificuldades que os meus alunos demostravam para assimilar os conteúdos. Essas situações provocaram em mim uma angústia muito grande, o que me fez repensar em minha prática como docente. Diante disto, comecei a introduzir em minhas aulas exemplos de situações em que pudesse despertar interesse e sentido no estudo dos conceitos algébricos. Mesmo assim, tal mudança nem sempre foi suficiente.

Diante de situações como estas, o meu desejo de “aprender” a ensinar de uma maneira mais significativa foi ampliando. Neste contexto, buscava capacitação através de curso de formação de professores, palestras, roda de conversa com outros colegas, minicursos, entre outros, acreditando que ajudaria em minha prática. Ainda nesta busca por formação, soube que estava abrindo um curso (2014) de especialização em Educação Matemática na UNEB campus II, lugar onde cursei minha graduação e aprendi muito.

O meu desejo em cursar a especialização foi imediato. Fiz a inscrição e participei da seleção, lá revi alguns dos meus professores e verbalizei as minhas angústias, dificuldades, e os mecanismos usados para amenizar as lacunas deixadas na graduação, e ainda, o quanto estava esperançosa com o curso, pois acreditava que seria uma oportunidade para aprender e melhorar como profissional, por fim, saiu o resultado da seleção, estava aprovada.

Durante o percurso do curso, participei de momentos riquíssimos de discursões e relatos de experiências com meus colegas. As aulas de Didática e Metodologia do Ensino de Matemática foram encantadoras, nas quais aprendi muito.

Mas foi a disciplina de Resolução de Problemas e Investigação Matemática que me despertou o desejo de pesquisar, a princípio, sobre o ensino de álgebra através da resolução de problemas.

Comecei a conversar com alguns colegas e os relatos de experiências eram muito parecidos com os meus. Foi então, que conversando com uma colega da pós-graduação (e também ex-colega da graduação), decidimos pensar em uma maneira para facilitar o ensino de álgebra, principalmente no 8º ano do ensino fundamental II, pois julgávamos ser o ano que apresentava conteúdos algébricos mais complicados de ensinar, e onde os alunos demostravam mais dificuldades em aprender.

Combinamos então em fazer o trabalho de conclusão do curso em dupla, porém, problemas pessoais fizeram com que não pudéssemos iniciar a pesquisa e, consequentemente, terminar a monografia no tempo previsto pelo programa. A coordenadora do curso deu-nos um novo prazo. Frente a isso, minha amiga e eu fomos incentivadas pela professora Grace Barqueiro a levar adiante a pesquisa com o tema ensino de álgebra, conforme havíamos pensado.

Conversando com a docente sobre a dificuldade em trabalhar com o material que é adotado em uma das escolas que leciono, dos autores Imenes e Lellis (2015), a mesma chamou minha atenção que os autores utilizam, por diversas vezes, sequências de atividades que levam o aluno a observar e generalizar padrões matemáticos. Baseada na sua pesquisa de doutorado, a professora afirmou que adotar tal atividade na sala de aula ajuda no desenvolvimento do pensamento algébrico, principalmente no que diz respeito à própria generalização que é um dos processos do pensamento matemático avançado.

Como exemplo, nos mostrou um problema do livro de Vale *et al* (2011). Eu e minha amiga resolvemos separadamente. Para nossa surpresa, percebemos que pensamos e solucionamos de maneira diferente. Vale *et al* (2011) ainda apresentou uma terceira maneira de resolver. Verificamos também que a atividade nos permitiu sair de uma sequência de um padrão figurativo e chegar a duas expressões algébricas equivalentes, que descreviam a relação entre a quantidade de palitos solicitada na questão e a posição da figura.

Foi aí que percebi o potencial do material de Imenes e Lellis (2015) e que atividades de observação e generalização de padrões podem vir a ser uma provável forma de despertar o interesse do aluno e de dar sentido ao estudo dos conceitos algébricos. Esta experiência nos fez pensar: quais seriam as estratégias utilizadas pelos nossos alunos para resolver um problema de padrões matemáticos? Será que mesmo sem ter tido contato com a álgebra simbólica, conseguiria generalizar e chegar na expressão algébrica?

Diante desses questionamentos eu e minha amiga decidimos que o tema da nossa pesquisa seria *generalização de padrões no ensino da álgebra*. No entanto, faríamos a pesquisa individualmente, cada uma na sua respectiva turma do 7º ano, que são duas realidades diferentes: a dela com alunos da cidade do interior e pertencentes a uma rede particular de ensino. No meu caso, serão alunos da capital e que frequentam a rede estadual.

A seguir apresentaremos os objetivos e resultados de alguns pesquisadores e, a influência dos mesmos na delimitação da questão, e o objetivo desta pesquisa.

1.2 Leituras que influenciaram o objetivo e questão da pesquisa

Segundo Oliveira e Laudares (2015) dentre os conteúdos matemáticos, um dos momentos mais impactante para os alunos do Ensino Fundamental é o momento em que começam a surgir “letras no lugar de números“, segundo os autores, é essa a concepção que a grande maioria dos estudantes tem da álgebra, a letra é sempre uma incógnita, que serve apenas para indicar um valor desconhecido.

Além disso, Gil (2008) afirma que algumas barreiras se configuram na álgebra pelo fato dos discentes trazerem para o contexto algébrico dificuldades herdadas do aprendizado no contexto aritmético, ou ainda, por estender para o estudo algébrico, procedimentos aritméticos que não procedem.

Como alternativa para o ensino e aprendizagem da álgebra, Ponte (2006), refere que um dos grandes objetivos do estudo da álgebra, ao nível escolar, é de desenvolver o pensamento algébrico dos alunos. Este pensamento inclui a capacidade de manipulação de símbolos, a de lidar com muitas outras estruturas matemáticas e de usá-las na interpretação e resolução de problemas matemáticos ou de outros domínios.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais - PCN’s (BRASIL, 1998) reforçam que as atividades algébricas propostas no ensino fundamental devem possibilitar aos alunos construírem seus conhecimentos a partir de situações-problema que atribua significados à linguagem, aos conceitos e procedimentos referentes a esse tema, favorecendo o avanço do aluno quanto às diferentes interpretações das letras. Assim, os contextos dos problemas deverão ser diversificados para que eles tenham oportunidade de construir, diferenciar e traduzir as diversas representações algébricas, ou identificar parâmetros, incógnitas e variáveis para construir os procedimentos visando à resolução de equações.

No entanto, autores como Pereira e Fernandes (2012) afirmam que a álgebra abordada em sala está mais voltada para manipulação simbólica, aplicação de propriedades algébricas e especialmente na memorização de regras e procedimentos, que acabam não sendo suficientes para o desenvolvimento da compreensão da matemática e do pensamento algébrico.

Scarlassari e Moura (2015) apontam algumas possíveis dificuldades que os alunos apresentam neste modelo de abordagem da álgebra tais como:

> [...] a não compreensão da significação em linguagem retórica das fórmulas em linguagem simbólica; não compreensão das operações elementares; relacionar ou associar o que está representado e transportar os problemas para o contexto de que se trata. (SCARLASSARI e MOURA, 2015, p.1)

Os PCN's (BRASIL, 1998) apontam que esse tipo de ensino da álgebra, além de ser ineficiente, provoca grave prejuízo no trabalho com outros temas da matemática, também fundamentais, como os conteúdos referentes à geometria.

Diante disso, é notória a importância de se propor novas abordagens para o ensino e aprendizagem de álgebra, que consigam desenvolver nos alunos o pensamento algébrico, onde ele possa ser autor do seu aprendizado por meio de investigação, e desenvolvam estratégias para resolver problemas matemáticos. Um exemplo deste tipo de abordagem é ressaltado nos PCN's:

> É interessante também propor situações em que os alunos possam investigar padrões, tanto em sucessões numéricas como em representações geométricas e identificar suas estruturas, construindo a linguagem algébrica para descrevê-los simbolicamente. Esse trabalho favorece a que o aluno construa a ideia de Álgebra como uma linguagem para expressar regularidades. (BRASIL, 1998, p.117)

Borralho e Barbosa (2009), afirmam que para melhorar o desenvolvimento do pensamento algébrico e desenvolver o sentido dos símbolos matemáticos, é necessário que aconteça a utilização de práticas de ensino adequada onde todo o trabalho seja desenvolvido através de tarefas investigativa e exploratória. Neste tipo de atividade, os estudantes têm a oportunidade de explorar e investigar padrões e relações numéricas, além da possibilidade de explicitar as suas ideias, discutir e refletir sobre as mesmas.

Ainda de acordo com Borralho e Barbosa (2009), os padrões podem ajudar os alunos a perceber, por exemplo, a "verdadeira" noção de variável, que para a maioria é vista apenas como um número desconhecido, conforme foi confirmado por Oliveira e Laudares (2015). Como explica Devlin (2002, apud Vale 2011 et al, p. 9).

> O que o matemático faz é examinar "padrões" abstratos – padrões numéricos, padrões de forma, padrões de movimento, padrões de comportamento, etc. Esses padrões tanto podem ser reais como imaginários, visuais ou mentais, estáticos ou dinâmicos, qualitativos ou quantitativos, puramente utilitários ou assumindo um interesse pouco mais recreativo. Podem surgir a partir do mundo à nossa volta, das profundezas do espaço e do tempo, ou das atividades mais ocultas da mente humana.

Barbalho (2011) em seu artigo, intitulado Padrões e o desenvolvimento do pensamento algébrico, buscou compreender o significado da utilização de padrões em situações de exercícios de investigação de forma a melhorar o desenvolvimento do pensamento algébrico. Sua pesquisa teve como ponto de partida e se concentrou em duas investigações: uma do raciocínio algébrico e a outra no que ele chamou de comunicação matemática.

Os resultados da investigação de Barbalho (2011) mostraram que a exploração de padrões num contexto de tarefas de investigação pode contribuir para o entendimento da Álgebra, permite o desenvolvimento do pensamento algébrico e desenvolve a comunicação matemática através do uso de uma linguagem, escrita e oral, não ambígua e adequada à situação.

De acordo com Vale (2011), "os padrões devem ser entendidos na matemática escolar não apenas como um tema a explorar, mas como uma componente transversal", ou seja, deve perpassar todo o ensino básico.

Além disso, de acordo com Frobisher e seus colaboradores (2007 apud Vale 2011), os padrões podem ser aplicados em toda a matemática e por intermédio do seu estudo, pode-se chegar à generalização algébrica, para isso o papel do professor é crucial neste processo.

Segundo Vale *et al* (2011, p 10), trabalhar com resoluções de problemas, onde a busca de padrões seja uma estratégia essencial, os estudantes acabam experimentando da utilidade matemática e desenvolve o conhecimento de conceitos novos.

Vale *et al* (2011) refere que para os alunos consigam resolver problemas, explorar e investigar padrões, fazer conjecturas, em suma, desenvolvam o pensamento algébrico, é de suma importância a paciência, tempo, energia e perseverança do professor.

Diante do estudo dos autores apresentados até aqui, ficou evidente para nós, que a utilização de tarefas que envolvem padrões, cria um ambiente na aula de matemática de grande investigação, descoberta e aprendizado, desenvolvendo com isso o pensamento algébrico pautado no significado e não na mera repetição e memorização de formas e procedimentos.

Para nossa surpresa, na busca por pesquisas relacionadas ao tema da generalização de padrões, encontramos o artigo de Pereira e Fernandes (2012), na revista *Iberoamericana de Educación Matemática*, cujo objetivo ao encontro das nossas inquietações, ou seja, os autores buscaram *descrever e compreender as estratégias de generalização usadas por alunos do 7º ano diante de um problema que apresente um padrão matemático*. Neste artigo, Pereira e Fernandes (2012) concluíram que os alunos desenvolvem várias estratégias das quais prevaleceram as estratégias *Explícitas*, seguida das estratégias *Diferença e Contagem*.

Constatar a existência de uma pesquisa com o mesmo interesse nosso, a princípio nos desanimou, mas, logo em seguida, percebemos que poderíamos replicá-la. A referida investigação foi realizada em Portugal. Assim sendo, os sujeitos de pesquisa seriam diferentes na nacionalidade.

Encontramos aqui no Brasil a dissertação de mestrado de Trevisani (2013) cuja questão norteadora da pesquisa foi: “quais são as estratégias utilizadas por alunos do 7° ano do Ensino Fundamental para generalizar padrões com o software MiGen?”. Neste sentido, traçou por objetivo o de compreender as estratégias que estudantes desse ano escolar utilizam para generalizar padrões com o uso de um software denominado MiGen, que trabalha com padrões que se movimentam na tela do computador. O referido autor concluiu que as estratégias usadas pelos alunos foram à *explícita*, *contagem* e a *termo unidade.*

Assim sendo, o artigo de Pereira e Fernandes (2012) e a dissertação de Trevisani (2013), aumentaram o nosso interesse para pesquisar sobre o ensino de álgebra através de problemas de padrões. Além disso, serviram de inspiração para a delimitação da questão da presente pesquisa: *Quais as estratégias utilizadas por* *alunos do 7º ano da rede estadual de ensino, ao resolver um problema de generalização de padrão matemático*?

Neste sentido, o nosso objetivo será o de *analisar as estratégias utilizadas pelos alunos frente a esse problema, além disso, observar o envolvimento e o interesse dos mesmos diante da atividade*.

O estudo tanto do artigo de Pereira e Fernandes (2012), quanto da dissertação de Trevisani (2013), mostraram que ambas apresentam a categorização dos tipos de estratégias de acordo com a tese de Barbosa (2009), o que nos serviu de inspiração para o nosso referencial teórico. No capítulo seguinte apresentaremos os principais pressupostos extraídos do trabalho destes autores.

Com isso, acredito que a realização dessa pesquisa vai contribuir com a minha formação profissional e também, nortear algumas metodologias "facilitadoras" no ensino do pensamento algébrico e da álgebra simbólica o que refletirá na aprendizagem e no interesse dos alunos para tais conteúdos.

CAPÍTULO II
REFERENCIAL TÉORICO

Neste capítulo apresentaremos alguns aspectos da generalização de padrões, de acordo com Stacey (1989, apud Vale, 2011) e de Radford (2008, apud Pereira e Fernandes, 2012), e as estratégias de generalização que utilizaremos para analisar os dados desta pesquisa, tomando como referência os tipos de estratégias caracterizados na tese de Barbosa (2009): Contagem, Termo Unidade, Diferença, Explícita e Tentativa e Erro.

2.1 Tipos de generalizações dos padrões matemáticos

Segundo Barbosa (2009) a generalização é uma capacidade própria do pensamento matemático e se torna um papel decisivo no desempenho de atividades de qualquer matemático. Baqueiro (2016) reforça essa a afirmação ao referir que

> [...] o processo de generalização de padrões é uma forma de conceber a álgebra que deve estar presente em todas as etapas da educação algébrica, principalmente na educação básica, constituindo-se em um dos elementos caracterizadores do pensamento algébrico que auxiliam na construção de objetos matemáticos (por exemplo, 'função'), além de ser um dos importantes processos do pensamento matemático avançado que podem levar à abstração. (p. 188).

As análises das dissertações e teses realizadas por Baqueiro (2016), no período de 2003 a 2013, revelou, entre outras coisas, que questões que levam à prática investigativa e exploratória, como as que envolvem observação e generalização de padrões, constituem um importante meio de conduzir o aluno ao desenvolvimento de processos cognitivos que o levem à descoberta de conceitos matemáticos. (p. 188). A autora afirma ainda

> que as atividades que envolvem generalização de padrões constituem um caminho para a introdução e desenvolvimento do pensamento algébrico. A percepção de padrões serve como instrumento para a utilização da letra e pode levar à generalização de uma noção matemática. É uma proposta de ensino interessante, pois pode ser utilizada na construção de expressões numéricas e/ou algébricas significativas.

Barbosa (2009) tendo por base a ordem de grandeza do termo de uma sequência envolvendo padrões e as estratégias que estão implicadas na sua descoberta distingue a generalização em *próxima* e *distante.* Citando Stacey a autora explica que:

> Quando é possível determinar, de forma rápida e eficaz, um termo da sequência recorrendo a desenhos ou ao método recursivo, a generalização diz-se *próxima*. Se, pelo contrário, dificilmente as abordagens descritas anteriormente permitem o cálculo de um dado termo da sequência, implicando a compreensão e descoberta de uma regra geral, a generalização em causa é *distante*. (BARBOSA, 2009, p. 61).

Barbosa (2009) refere também à generalização algébrica. Com base em Radford, a autora explica que as *generalizações algébricas* de padrões implicam: (1) a apreensão de uma regularidade; (2) a generalização dessa regularidade a todos os termos da sequência em questão; e (3) a formação de uma regra direta ou um esquema direto que permita determinar qualquer termo da sequência. No entanto, existe alguma dificuldade na ligação destes três aspetos centrais (RADFORD, 2008 apud, PEREIRA E FERNANDES, 2012).

Baqueiro (2016) observa que tais dificuldades acontecem principalmente quando as atividades são aplicadas aos alunos do ensino fundamental II, mas que mesmo com as dificuldades iniciais [...] ficou comprovado que em seu decorrer os alunos assumiram atitudes e autonomia no sentido de observar, levantar conjecturas, tirar conclusões e justificar suas respostas. (p. 189). Que a experiência com as atividades os tornou mais reflexivos, fazendo-os criar e testar hipóteses.

Barbosa (2009) refere que o processo de generalizar está relacionado com a identificação de padrões e propriedades comuns a várias situações e tentar expressá-los verbalmente ou simbolicamente. Complementa afirmando que:

> Generalizar envolve o estabelecimento de conexões e a sua caracterização numa afirmação sucinta a partir da qual podem ser extraídos casos particulares através da *particularização*[1]. (BARBOSA, 2009, p. 63).

Para que essa conexão se estabeleça, é preciso incentivar o "olhar" sobre as propriedades matemáticas, de modo que a relação existente entre a ordem de posição dos termos da sequência e seu valor correspondente constitua um caminho para se encontrar um padrão algebricamente útil. (BAQUEIRO, 2016, p.190).

Concluímos, portanto, que as atividades que exploram padrões matemáticos provocam nos alunos o desenvolvimento da capacidade de pensar algebricamente,

---

[1] Apesar de estes processos, particularização e generalização, serem tratados isoladamente é difícil mantê-los separados. A razão de se particularizar é permitir e promover a generalização. As generalizações carecem de validação em casos particulares antes de se procurar um argumento convincente(BARBOSA, 2009, p. 63).

servindo de base para o raciocínio matemático, o que permite o aluno a ir além das meras competências de cálculo.

2.1 Tipos de estratégias de generalização dos padrões matemáticos

Vários estudos mostram que os alunos usam uma variedade de estratégias para resolver tarefas que envolvam padrões. Para esta pesquisa, abordaremos os tipos de estratégias presentes na pesquisa de Barbosa (2009) tais como: Contagem, Termo Unidade, Diferença, Explícita e Tentativa e erro. O quadro seguinte traz a definição de cada um deles, segundo a autora.

Quadro 1: Categorização das estratégias de generalização segundo Barbosa (2010)

Estratégia		**Descrição**
Contagem (C)		Desenhar uma figura e contar os seus elementos.
Termo unidade	Sem ajuste (TU_1)	Considerar um termo da sequência como unidade e usar múltiplos dessa unidade.
	Com ajuste numérico (TU_2)	Considerar um termo da sequência como unidade e usar múltiplos dessa unidade. É feito um ajuste do resultado tendo por base propriedades numéricas.
	Com ajuste contextual (TU_3)	Considerar um termo da sequência como unidade e usar múltiplos dessa unidade. É feito um ajuste do resultado tendo por base o contexto do problema.
Diferença	Recursiva (D_1)	Continuar a sequência com base na diferença entre termos consecutivos.
	Múltiplo da diferença sem ajuste (D_2)	Usar a diferença entre termos consecutivos como factor multiplicativo, sem ajustar o resultado.
	Múltiplo da diferença com ajuste (D_3)	Usar a diferença entre termos consecutivos como factor multiplicativo. É feito um ajuste do resultado.
Explícita (E)		Descobrir uma regra, com base no contexto do problema, que permite o cálculo imediato do valor da variável dependente sendo conhecida a variável independente correspondente.
Tentativa e erro (TE)		Adivinhar uma regra fazendo sucessivas tentativas com diferentes valores. Conhecida uma regra, experimentar sucessivos valores até que sejam verificadas as condições pretendidas.

Fonte: Barbosa, 2010, pág 4

Vale ressaltar que Barbosa (2009) divide esses tipos de estratégias nos de natureza *visuais* e *não visuais*, dependendo se a componente visual do problema tem ou não impacto na generalização. Por exemplo, na sequencia que aparece na figura seguinte, a componente visual tem impacto direto na generalização, pois é preciso estar atento aos “percevejos” que são comuns.

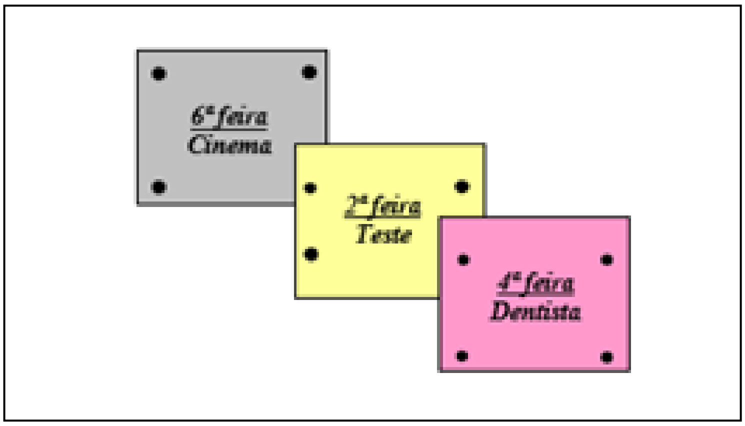


Figura 1: Exemplo de uma sequência que a componente visual tem impacto na generalização
Fonte: adaptado de Barbosa (2009), p. 126.

Assim sendo, Barbosa (2009) faz a seguinte classificação quanto à natureza das estratégias:

- Visuais: as estratégias de contagem (C), termo unidade com ajuste visual (TU_3), múltiplo da diferença com ajuste (D_3) e explícita (E).
- Não visuais: as estratégias termo unidade sem ajuste (TU_1), termo unidade com ajuste numérico (TU_2), recursiva (D_1), múltiplo da diferença sem ajuste (D_2) e tentativa e erro (TE). (BARBOSA, 2009, p. 371).

Assim sendo, ao resolver questões envolvendo a sequência da figura 1, por exemplo, utilizando as estratégias contagem (C), termo unidade com ajuste visual (TU_3), múltiplo da diferença com ajuste (D_3) e explícita (E); o “olhar” na componente visual é muito importante, para se chegar a uma generalização correta.

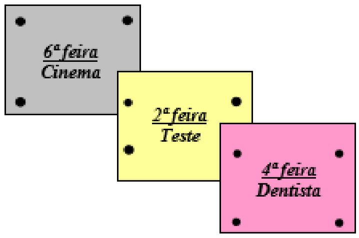
Para exemplificar cada uma dessas estratégias escolhemos atividades apresentadas nas pesquisas de Barbosa (2009) e Trevisani (2013), com o objetivo de esclarecer melhor a ideia subjacente a cada uma delas.

Barbosa (2009), em sua investigação, aplicou algumas atividades envolvendo padrões à alunos do 6º ano. Entre elas, uma chamou a nossa atenção, a intitulada: “Os lembretes de Joana”. Nessa atividade, as três primeiras questões pretendiam que os alunos identificassem e utilizassem a relação existente entre o número de lembretes retangulares e o número de *pioneses*[2] utilizados.

Os lembretes da Joana

Em cada alínea deves <u>explicar detalhadamente</u> o teu raciocínio. Para o fazer podes utilizar cálculos, palavras ou desenhos.

Para não se esquecer dos seus compromissos a Joana pendura lembretes no placar do quarto, colocando *pioneses* como mostra a figura.



Se a Joana continuar a pendurar os seus lembretes desta forma:

1. De quantos *pioneses* precisará para colocar no seu placar 6 lembretes?
2. E se quiser pendurar 35 lembretes, de quantos *pioneses* precisará?
3. Sabendo que a Joana comprou uma caixa com 600 *pioneses*, quantos lembretes poderá pendurar, no máximo, no seu placar?
4. A Joana decidiu utilizar cartões triangulares para registar os seus compromissos. Sabendo que em cada vértice de um triângulo utiliza um *pionés* e que dois triângulos consecutivos têm um *pionés* em comum, estuda as alíneas anteriores para este caso.

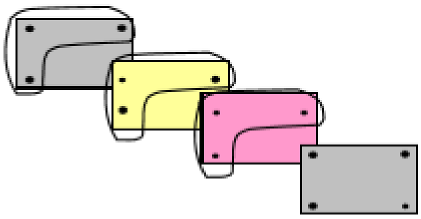
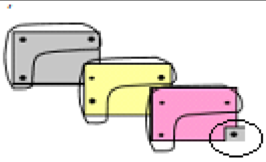
Adaptada de Lannin (2005)

Figura 2: Os lembretes de Joana
Fonte: Barbosa, 2009, p. 126

Elaboramos um quadro para sintetizar tal relação, que apresentamos a seguir, tomando por base as questões de 1 a 3. Nas questões 1 e 2 pegamos a análise feita por Barbosa (2009), ao prever possíveis respostas dos alunos ao resolvê-la, para as estratégias: *contagem e explícita*. Já para a questão 3, trouxemos como exemplo uma resposta concreta de uma das duplas investigadas pela autora. O resultado desse estudo é mostrado no quadro seguinte:

[2] Ana Cristina Coelho Barbosa é uma pesquisadora portuguesa que utiliza esta palavra, que não é comum para nós. Numa tradução livre, o termo *pioneses*, é utilizado no sentido de “percevejos”. Pequeno prego de cabeça grande e chata. (https://www.priberam.pt/dlpo/pioneses).

Quadro 2: Exemplificando as estratégias: contagem, explícita e tentativa e erro

QUESTÃO	PROPOSTA DE RESOLUÇÃO E/OU JUSTIFICATIVA	ESTRATÉGIA DE GENERALIZAÇÃO
(1) de quantos *pioneses* precisará para colocar no seu placar 6 lembretes?	Os alunos desenhando os seis lembretes e os respectivos *pioneses* e fazer sua contagem, encontrando 19 *pioneses* (Barbosa 2009, p. 127)	**Contagem**: Desenha uma figura e conta seus elementos.
(2) E se quiser pendurar 35 lembretes, de quantos *pioneses* precisará?	 Ao considerar que todos os lembretes têm 3 *pioneses*, com exceção do último que tem 4, obtemos uma expressão do tipo 3×(35−1)+4, o caso particular para expressão 3(n-1)+4 (onde n é o número de lembretes) (Barbosa 2009, pág 129).	**Explícita:** descobre uma regra com base no contexto do problema, que permite o cálculo imediato do valor da variável dependente sendo conhecida a variável independente correspondente.
(3) sabendo que a Joana comprou uma caixa com 600 *pioneses*, quantos lembretes poderá pendurar, no máximo, no seu placar?	 A dupla recorreu à diferença entre termos consecutivos procedendo a um ajuste do resultado com base no contexto do problema. No caso dos lembretes rectangulares, consideraram que os 600 *pioneses* seriam distribuídos em grupos de três (diferença entre dois termos consecutivos da sequência[3]), mas como era necessário 1 *pionés* para o último lembrete, sentiram necessidade de ajustar[4] o resultado. (Barbosa 2009, pág 211)	**Diferença com ajuste:** Usa a diferença entre termos consecutivos como fator multiplicativo, ajustando o resultado.

Fonte: adaptado de Barbosa (2009, p. 127 - 131) e de Barbosa (2010, p.12-13)

Na investigação de Barbosa (2009) ela observou que a estratégia *termo unidade com ajuste numérico* (TU_2), raramente se adequavam às questões propostas nas tarefas, porque se caracteriza pelo recurso de após serem utilizados múltiplos de termos da sequência, envolve uma correção do resultado, baseada apenas em propriedades numéricas. No caso específico desta questão, para fazer o ajuste é preciso também levar em consideração a componente visual.

[3] Refere-se à sequência dos número de pioneses: 4, 7, 10, 13, ...; cuja diferença entre dois termos consecutivos é três.

[4] Fizeram 600:3 = 200 e depois o ajuste 200 – 1 = 199.

Como exemplo do uso da estratégia TU2 de forma inadequada, a autora traz a resposta para a questão 3, de uma das duplas investigadas, conforme figura seguinte:

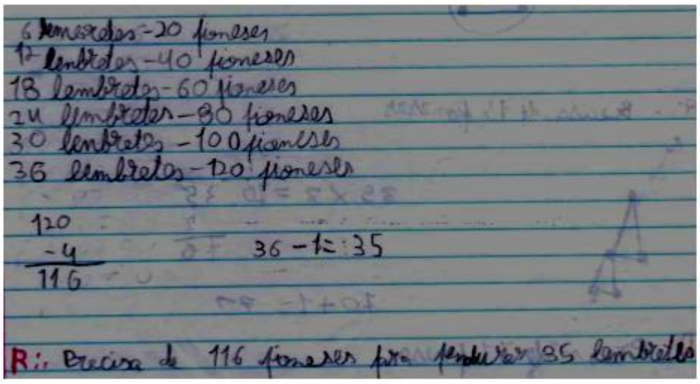


Figura 3: Resolução da dupla António e pelo Daniel da questão 2, Tarefa 1
Fonte: Barbosa, 2009, p. 238

Em sua analise a autora descreveu o seguinte:

> Tendo já determinado o sexto termo da sequência (questão 1), os alunos procuraram o múltiplo de seis mais próximo de trinca e cinco, utilizando um raciocínio proporcional. Após terem descoberto o número de *pioneses* necessário para pendurar trinta e seis lembretes, fizeram um ajuste para chegar ao valor pretendido. Este ajuste não teve por base as condições do problema apresentado, centrou-se apenas na utilização de propriedades numéricas (BARBOSA 2009, p.238).

A análise feita por Barbosa (2009) revela que a dupla, ao utilizar a estratégia numérica, não conseguiram ter sucesso, pois a componente visual do problema tem impacto na generalização. Com base no raciocínio da dupla, uma possível resposta seria:

6 lembretes 19 pioneses
12 lembretes 37=2.19 - 1 (que é o pioneses comum ao juntar 6+6 lembretes)
18 lembretes 55=3.19 - 2 (que são os pioneses comum ao juntar 6+6+6 lembretes)
24 lembretes 73=4.19- 3 (que são os pioneses comum ao juntar 6+6+6+6 lembretes)
30 lembretes 91=5.19-4 (que são os pioneses comum ao juntar 6+6+6+6+6 lembretes)
36 lembretes 109=6.19 - 5 (que são os pioneses comum ao juntar 6+6+6+6+6+6 lembretes)

Daí, sabendo o número de pioneses de 36 lembretes, bastava retirar 4 pioneses para diminuir um lembrete e recolocar um deles, ou seja, faria a conta 109 – 3=106.

Figura 4: Exemplo da estratégia termo unidade com ajuste contextual
Fonte: Autoria própria. Adaptado da resolução da figura 3.

Na possível solução apresentada na figura 3, a estratégia deixa de ser um exemplo de termo unidade com ajuste numérico (TU_2) e passa a ser termo unidade com ajuste contextual (TU_3).

Com relação às estratégias que envolvem o ajuste contextual (TU_3 e D_3), Barbosa (2009) afirma que qualquer uma delas implica em um ajuste baseado no contexto do problema, o que nem sempre se afigura fácil para os alunos [...] (p. 194).

Na dissertação de Trevisani (2013) encontramos também bons exemplos, que nos ajudaram a entender melhor os tipos de estratégias propostos por Barbosa (2009). Utilizamos duas de suas atividades. A primeira, que denominou de “A escada” e a segunda, intitulada “Construindo Pontes”.

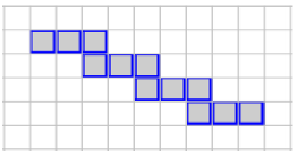
Utilizamos a atividade “A escada” para exemplificar as estratégias de *diferença recursiva*, *múltiplo da diferença sem ajuste* e *termo unidade sem ajuste*. Já a tarefa “Construindo Pontes”, serviu para ilustrar as estratégias: *múltiplo da diferença com ajuste* e *termo unidade com ajuste contextual.*

Nas duas atividades, o objetivo de Trevisani (2013), era que os alunos identificassem e, se possível, utilizassem as relações existentes entre o número de quadrados de uma escada com o número de degraus da mesma, usando o software MiGen. Segundo Baqueiro (2016) A aplicação das atividades auxiliadas por recursos extras, a exemplo do software MiGen [...] ajuda os alunos a visualizar regularidades e encontrar estratégias para generalizar um padrão e chegar a uma expressão algébrica. (p. 189).

A figura seguinte apresenta a atividade 1 proposta por Trevisani.

ATIVIDADE 1 – A ESCADA

Uma escada é construída da seguinte forma:



Na figura acima, ela possui **4 degraus**, com **12 quadrados** no total.

1. Desenhe uma escada com **2 degraus**.
Quantos quadrados são necessários para construir essa escada?
Justifique sua resposta.

2. Quantos quadrados são necessários para construir uma escada com **8 degraus?**
Justifique sua resposta.

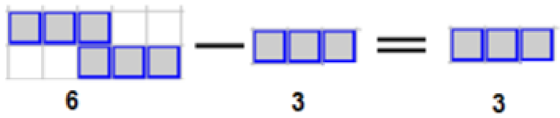
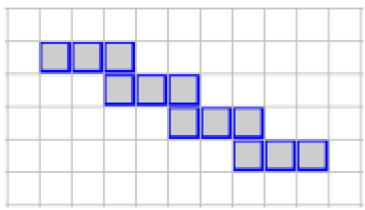
3. Quantos quadrados são necessários para construir uma escada com **32 degraus?**
Justifique sua resposta.

4. Encontre a regra que relaciona o número de quadrados de uma escada com o número de degraus da mesma.
Justifique sua resposta.

Figura 5: Exemplo da Atividade1 – A escada
Fonte: Trevisani (2013, p.26).

Conforme fizemos com a atividade “os bilhetes de Joana”, estudamos a relação feita por Trevisani (2013) entre as possíveis respostas que o autor previu para a questão 2 da atividade “A escada”, envolvendo as estratégias: *diferença recursiva, diferença sem ajuste* e *Termo unidade sem ajuste*. Elaboramos um novo quadro para sintetizar tal relação, que apresentamos a seguir.

Quadro 3: Exemplificando as estratégias: diferença recursiva, diferença sem ajuste.

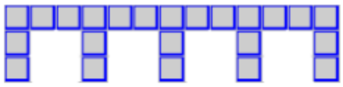
QUESTÃO	PROPOSTA DE RESOLUÇÃO E/OU JUSTIFICATIVA	ESTRATÉGIA DE GENERALIZAÇÃO
(2) quantos quadrados são necessários para construir uma escada com 8 degraus? Justifique sua resposta.	 Diferença entre o 2º e o 1º termo da sequência (Travisane, 2013, pág.27) O aluno completaria a escada degrau por degrau tendo com base nessa diferença até chegar ao total de 8 degraus. (Trevisani, 2013, pág. 27)	**Diferença recursiva:** Consiste em continuar a sequência com base na diferença entre dois termos consecutivos.
	O aluno pode perceber que para calcular o número total de quadrados de determinada escada basta multiplicar o total de degraus da mesma por 3. Ou seja, bastaria multiplicar 8 (total de degraus da escada) por 3 (número de quadrados que aumenta ao se acrescentar um degrau na escada), obtendo como valor final o número 24. (Trevisani, 2013, pág. 27)	**Diferença sem ajuste:** incide em usar um múltiplo da diferença entre termos consecutivos como um fator multiplicativo para se chegar ao resultado.
	 A escada com 4 degraus e 12 quadrados no total O aluno pode pensar que, para obter o número total de quadrados de uma escada com 8 degraus, basta dobrar o número de quadrados de uma escada com 4 degraus. Obtendo como valor final o número 24 quadrados. Assim, eles estariam tomando como unidade os quatro primeiros degraus.	**Termo unidade sem ajuste:** Considerar o termo da sequência como unidade e usar múltiplos dessa unidade.

Fonte: adaptado de Trevisani (2013, p. 26 – 27)

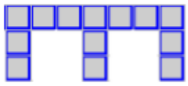
A figura seguinte apresenta a atividade 2 de Trevisani (2013), intitulada “Construindo pontes”.

ATIVIDADE 2 – CONSTRUINDO PONTES

Dois exemplos de pontes são mostrados abaixo. A primeira ponte contém **4 arcos**, e é formada por **23 quadrados.**



A segunda ponte contém **2 arcos**, e é formada por **13 quadrados.**

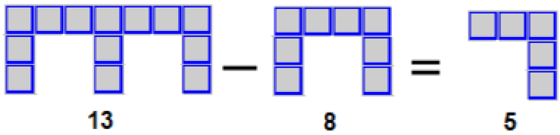
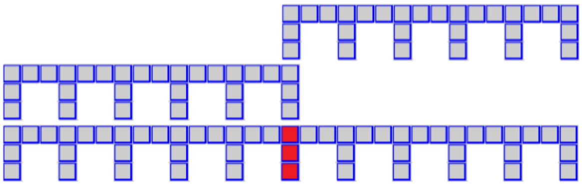


1. Desenhe uma ponte com **5 arcos**. Quantos quadrados são necessários para construir essa ponte? **Justifique sua resposta.**
2. Quantos quadrados são necessários para construir uma ponte com **10 arcos?** **Justifique sua resposta.**
3. Quantos quadrados são necessários para construir uma ponte com **100 arcos?** **Justifique sua resposta.**
4. Encontre a regra que relaciona o número de quadrados de uma ponte com o número de arcos da mesma. **Justifique sua resposta.**

Figura 6: Exemplo da Atividade2 – Construindo Pontes
Fonte: Trevisani, 2013, p. 28.

Estudamos a relação feita por Trevisani (2013) entre as possíveis respostas que o autor previu para a questão 2 envolvendo as estratégias: *múltiplo da diferença com ajuste e termo unidade com ajuste contextual*. Elaboramos um novo quadro para sintetizar tal relação, que apresentamos a seguir.

Quadro 4: Exemplificando as estratégias: múltiplo da diferença com ajuste e termo unidade com ajuste contextual.

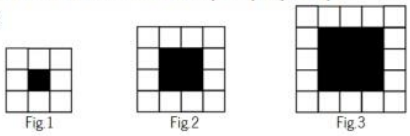
QUESTÃO	PROPOSTA DE RESOLUÇÃO E/OU JUSTIFICATIVA	ESTRATÉGIA DE GENERALIZAÇÃO
(2) quantos quadrados são necessários para construir uma ponte com 10 arcos? Justifique sua resposta.	 Diferença entre o segundo e o primeiro termo da sequência. O aluno ao adotar múltiplos do resultado dessa diferença entre esses dois termos consecutivos como termos da sequência para calcular o número de quadrados de uma ponte. Porém, ele deve lembrar que faltarão os três quadrados da primeira coluna da ponte, e por isso deverá fazer um ajuste no resultado. Ou seja, 10 x 5 + 3 obtendo 53 quadrados.	**Diferença com ajuste:** Usa a diferença entre termos consecutivos como fator multiplicativo, ajustando o resultado.
	 Duas pontes com cinco arcos cada sobrepostas Tomando como unidade uma ponte com 5 arcos que poderia ser obtida acrescentando-se mais um arco no desenho dado na folha, é possível usar múltiplos dela para se determinar a resposta. Porém, ao fazer a sobreposição das duas pontes com 5 arcos cada, é possível verificar que há duas colunas se sobrepondo uma à outra (como mostra a figura acima) . Logo, o resultado é obtido multiplicado 2 vezes a quantidade de quadrados da ponte com 5 arcos, ou seja 28 x 2 = 56 e depois subtraído 3 da sobreposição, obtendo 53 quadrados.	**Termo unidade com ajuste contextual:** Consiste em considerar o termo da sequência como unidade e usar múltiplos dessa unidade. É feito um ajuste do resultado com base no contexto do problema.

Fonte: adaptado de Trevisani (2013, p. 29 – 31).

Por fim, para exemplificar a estratégia tentativa e erro trazemos o exemplo da atividade “A moldura” proposto por Pereira e Fernandes (2012), conforme figura que segue.

4.2. Tarefa 9 – Molduras

A Joana resolveu construir molduras, tal como as que observou numa exposição de artesanato, cujo contorno é constituído por peças quadradas geometricamente iguais, de um centímetro c



a) Completa a tabela seguinte:

Número da figura	1	2	3	4	5	…	*n*
Número de peças quadradas	8					…	
Perímetro (cm)	12					…	

b) Existe alguma figura da sequência com 800 peças quadradas? Explica a tua resposta.

c) O Jorge sugeriu à Joana que a expressão algébrica $4\times(n+2)-4$ representa o número de peças quadradas em qualquer figura da sequência. Concordas com ele? Explica a tua resposta.

d) A Catarina, por sua vez, indicou a expressão algébrica $2\times(n+2)+2\times n$ para representar o número de peças quadradas de qualquer figura da sequência. Esta expressão é equivalente à do Jorge? Explica a tua resposta.

e) Existe alguma figura da sequência com 208 centímetros de perímetro? Explica a tua resposta.

Tarefa adaptada de Alonso, Barbero, Fuentes, Azcárate, Dozagarat, Gutiérrez et al. (1993).

Figura 7: Tarefa "Molduras"
Fonte: Pereira e Fernandes, 2012, p. 14.

Os autores referem que na questão (b), envolvendo uma generalização distante, o grupo-alvo G2 recorreu à estratégia *tentativa-e-erro*, experimentando sucessivos valores até verificar a condição pretendida (p. 15), conforme resolução apresentada na figura seguinte:

$4\times 100+4=404$
$4\times 200+4=804$
$4\times 198+4=796$
$4\times 199+4=800$

Existe, é a figura 199

Figura 8: Exemplo de estratégia envolvendo Tentativa e erro
Fonte: Pereira e Fernandes, 2012, p. 15.

Barbosa (2009), que teve como objetivo de pesquisa, analisar "o modo como alunos do 6° ano de escolaridade resolvem problemas que envolvem generalização de padrões em contextos visuais", constatou que

> [...] tarefas centradas na exploração de padrões visuais conduziram os alunos à utilização de uma grande diversidade de estratégias de generalização. Apesar desta diversidade, houve estratégias que os alunos aplicaram com maior frequência do que outras, normalmente as de natureza visual[5]. Em geral, os alunos compreenderam as potencialidades das diferentes estratégias exploradas e em que situações seriam úteis, no entanto, em alguns casos em que deveriam descobrir valores distantes numa sequência recorreram a generalizações aritméticas, usando estratégias aditivas. (BARBOSA, 2009, resumo).

No trabalho de Pereira e Fernandes (2012) os autores, que investigaram alunos do 7º ano, observaram a prevalência da estratégia Explícita, seguida das estratégias Diferença e Contagem. Já Trevisani (2013), que também direcionou sua pesquisa a estudantes do mesmo nível de ensino, notou a frequência das estratégias *explícita, a termo unidade e a contagem.*

De modo análogo, iremos investigar *quais são as estratégias utilizadas por alunos do 7º ano da rede estadual de ensino, ao resolver um problema de generalização de padrão matemático*. A ideia é comparar os nossos resultados com os encontrados por Barbosa (2009), Pereira e Fernandes (2012) e Trevisani (2013).

Para facilitar o entendimento dessas estratégias utilizaremos o quadro sintetizado por Barbosa (2010), conforme quadro1.

No próximo capítulo, apresentaremos o processo metodológico empregado para responder nossa questão norteadora.

[5] Grifo nosso.

CAPÍTULO III
METODOLOGIA

Este capítulo apresenta as escolhas metodológicas para a realização desta pesquisa, tais como: tipo de abordagem, perfil dos participantes, local e instrumento da coleta de dados e a técnica para análise dos dados.

3.1 Caracterização da pesquisa

Para auxiliar a pesquisa, bem como o desenvolvimento e consolidação do presente trabalho, fizemos um levantamento bibliográfico em livros, artigo, dissertação e tese, que abordavam a temática da pesquisa. A revisão de literatura foi importante no sentido de nos ajudar na delimitação do objetivo e questão dessa pesquisa.

No intuito de responder à questão que norteia essa pesquisa: "*Quais as estratégias utilizadas por alunos do 7º ano da rede estadual de ensino, ao resolver um problema de generalização de padrão matemático*?", optamos por uma pesquisa que assume um caráter qualitativo. Segundo Gil (1991), em pesquisas desse tipo há uma relação dinâmica entre o mundo real e o sujeito, isto é,

> [...] um vínculo indissociável entre o mundo objetivo e a subjetividade do sujeito que não pode ser traduzido em números. A interpretação dos fenômenos e a atribuição de significados são básicas no processo de pesquisa qualitativa. Não requer o uso de métodos e técnicas estatísticas. O ambiente natural é a fonte direta para a coleta de dados e o pesquisador é o instrumento – chave. Os pesquisadores tendem a analisar seus dados indutivamente. O processo e seu significado são os focos principais de abordagem. (GIL,1991, p.20).

Ou seja, buscamos nessa pesquisa descrever, interpretar, compreender e explicar os dados coletados para assim responder a nossa questão de pesquisa, cujo objetivo é *analisar as estratégias utilizadas pelos alunos do 7º ano da rede estadual de ensino, ao resolver um problema de generalização de padrão matemático, além disso, observar o envolvimento e o interesse dos mesmos diante da atividade.*

A pesquisa foi classificada como *descritiva*, pois de acordo com Gil (2008, p.28), a mesma tem como objetivo primordial a descrição das características de determinada população ou fenômeno ou o estabelecimento de relações entre variáveis. No nosso caso, faremos a descrição das respostas dos alunos ao resolver a atividade envolvendo generalização relacionando ao tipo de estratégia desenvolvida.

Para alcançarmos nosso objetivo e respondermos a questão norteadora, elaboramos um questionário[6], que de acordo com Lakatos (2003 p. 201), "é um instrumento de coleta de dados, constituído por uma série ordenada de perguntas, que devem ser respondidas por escrito e sem a presença do entrevistador". Para esta investigação optamos por aplicar o questionário/atividade com a presença do pesquisador, que também é o professor da turma, mas procurando não interferir, ou seja, não dar pistas que influencie na escolha da estratégia por parte do aluno.

Ainda com relação à atividade e os seus itens, podemos afirmar que é do tipo perguntas mistas, que de acordo com a definição de Fiorentini e Lorenzato (2009) são aquelas que combinam partes fechadas e abertas[7].

A aplicação da atividade foi feita por meio da pesquisa de campo, que de acordo com Gil (2008, p.55) se caracterizam pela interrogação direta das pessoas cujo comportamento se deseja conhecer. Fiorentini e Lorenzato (2009) exemplificam da seguinte maneira:

> Se a questão a ser investigada for: "Porque os alunos apresentam dificuldades na resolução de problemas aritméticos em classe?", o pesquisador poderá [...] investigar um pequeno grupo de alunos durante o processo normal de aula. [...]

Assim sendo, a investigação foi realizada pelo professor[8] dos alunos, na sala de aula, em um dia normal de aula.

Resumindo, esta é uma pesquisa qualitativa, descritiva e de campo. O instrumento para coleta de dados é uma atividade com perguntas mistas (fechadas e abertas) e foi aplicado em campo, ou melhor, aplicado na sala de aula do aluno. Assim, após apresentação das escolhas metodológicas, exibiremos na próxima sessão o contexto em que foi realizada a pesquisa.

3.2 Contexto da investigação

---

[6] A partir daqui, iremos nos referir ao questionário como a Atividade.

[7] Segundo Fiorentini e Lorenzato (2009), as perguntas Fechadas são aquelas que apresentam alternativas para respostas, caso contrário são ditas Abertas. (p. 116).

[8] Que neste caso também é o pesquisador.

Esta sessão foi subdividida em quatro subseções. Na primeira apresentamos o local e os sujeitos da pesquisa. A segunda descreve a atividade utilizada para coletas de dados. O terceiro os procedimentos durante a coleta de dados e na última exibimos a técnica que será empregada para a análise dos dados obtidos.

3.2.1 Local e os participantes da pesquisa

A pesquisa foi realizada em uma escola estadual localizada na cidade de Salvador - Ba, em uma escola da rede estadual. É uma escola que apesar de não ter uma boa estrutura, é muito requisitada no bairro, por ainda prezar pela disciplina, norma e regras institucionais.

Os participantes da pesquisa são alunos do 7º ano do ensino fundamental II do turno vespertino. A turma é composta por 30 alunos com frequência regular, com faixa etária ente 13 e 14 anos de idade. Muitos dos alunos dessa turma não costumam realizar atividades em casa e nem na classe, exigindo um esforço maior do professor para conseguir metodologias que despertem o interesse dos mesmos para o estudo, principalmente de matemática.

Este fato foi o que nos motivou à escolha dessa turma, pois queríamos observar o interesse dos mesmos frente a uma atividade diferente das quais estão habituados.

3.2.2 Instrumento para coletas de dados

A coleta de dados foi feita por meio de um *questionário* que intitulamos como *Atividade*, na qual aborda o processo de generalização através de padrões. Essa atividade foi elaborada a partir uma adaptação de uma sequência presente no artigo de Pereira e Fernandes (2012, p.9), conforme figura seguinte:

4.1. Tarefa 4 – Palitos

A Joana utilizou palitos para construir uma sequência de figuras, apresentando as quatro primeiras figuras.

Figura 1 Figura 2 Figura 3 Figura 4

a) A tabela seguinte relaciona o número da figura com o seu número de palitos. Completa-a.

Número da figura	1	2	3	4	5	6	…	50
Número de palitos	4							

b) Quantos palitos são necessários para construir a centésima figura? Explica como chegaste a essa conclusão.

c) Existe, nesta sequência, alguma figura com 601 palitos? Se existir, determina a ordem que lhe corresponde.

d) Escreve uma regra que permita determinar o número de palitos de qualquer figura desta sequência. Explica o teu raciocínio.

e) Escreve uma expressão algébrica que traduza a regra descrita na pergunta anterior.

f) A tabela seguinte relaciona o número da figura com o seu perímetro. Completa-a.

Número da figura	1	2	3	4	5	6	…	40
Perímetro	4							

g) Qual é o perímetro da figura 80? Explica como pensaste.

h) Escreve uma regra que permita determinar o perímetro de qualquer figura desta sequência. Explica o teu raciocínio.

i) Escreve uma expressão algébrica que traduza a regra descrita na pergunta anterior.

Tarefa adaptada de Vale e Pimentel (2009).

Figura 9: Tarefa que serviu de modelo para a elaboração do nosso questionário
Fonte: Pereira e Fernandes (2012, p. 9 e10).

Elaboramos o questionário com oito itens, nos sete primeiros os alunos respondem questões envolvendo a observação e generalização de padrão, e a última, para poderem expressar sua opinião sobre a atividade.

Começamos por adaptar a sequência apresentada por Pereira e Fernandes (2012). Como os itens se referem a palitos, pegamos palitos de fósforos reais e construímos uma sequência. Em seguida, tiramos a foto e colocamos no questionário, conforme mostra a figura seguinte:

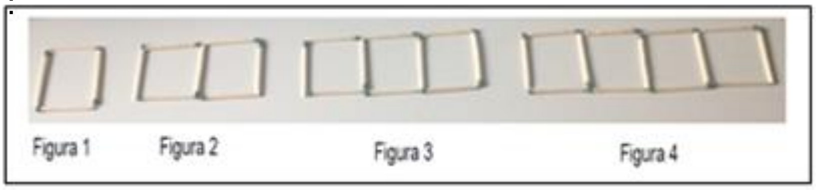


Figura 10: Sequência presente no questionário, construída com palitos de fósforos.
Fonte: autoria própria

A segunda adaptação foi que colocamos duas questões iniciais relacionadas à construção da sequência. Como seria o primeiro contato dos alunos com esse tipo de atividade, queríamos que os mesmos visualizassem a figura e descobrissem um padrão que os permitissem continuar a sequência.

Com base na imagem, dê o que se pede:

a) Desenhe a figura 5 e a figura 6.

b) Explique como pensou para fazer a letra (a)

Figura 11: Questões (a) e (b) do questionário
Fonte: autoria própria.

A questão (a) leva naturalmente ao aluno responder usando a estratégia da Contagem, pois irá fazer o desenho das figuras 5 e 6. Já na letra (b), a intenção é que exprimam, em linguagem natural, como foi que perceberam o padrão. Nesse item, nossa conjectura é de que a maioria utilize a estratégia da Diferença recursiva, ou seja, escrevam que para construir a figura 5 e 6, eles usaram a figura anterior e acrescentaram mais um quadrinho.

Dos itens (c) ao (g) os questionamentos são no sentido de que o aluno perceba a relação de dependência entre as variáveis envolvidas na atividade: número da figura e a quantidade de palitos. O objetivo é que visualizem um padrão que os levem à generalização distante e/ou algébrica. Para que isso aconteça, o aluno precisa abandonar as estratégias, de contagem e recursiva, caso as tenham utilizado nos itens (a) e (b).

c) A tabela seguinte relaciona o número da figura com o seu perímetro. Completa-a. Explique como pensou.

Número da figura	1	2	3	4	5	6	...	40
Perímetro	4							

d) Qual é o perímetro da figura 80? Explique como pensou.

e) Nessa sequência, existe alguma figura em que o perímetro seja igual a 601? Explique como chegou a essa conclusão

f) Escreva uma regra que permita determinar o perímetro de qualquer figura desta sequência. Explique como chegou a essa conclusão.

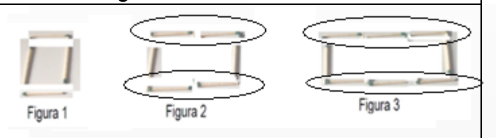
g) Escreva uma **expressão matemática** que traduza a regra descrita na questão anterior.

Figura 12: Questões (c) a (g) do questionário
Fonte: autoria própria.

Vale ressaltar que utilizamos apenas a tabela da letra (f) da tarefa de Pereira e Fernandes (2012) (figura 9). A turma já tinha estudado o assunto perímetro. Percebemos que seria uma oportunidade de revisar tal conteúdo.

O próximo passo dado, antes de aplicar a atividade e de analisar as respostas dos alunos, foi o de pegar a questão (c) e elaborar algumas possíveis respostas e a estratégia relacionada. Elaboramos um quadro no qual colocamos o resultado desse estudo.

Quadro 5: Possíveis soluções para a questão (c) do questionário envolvendo as estratégias: contagem, diferença recursiva e explícita.

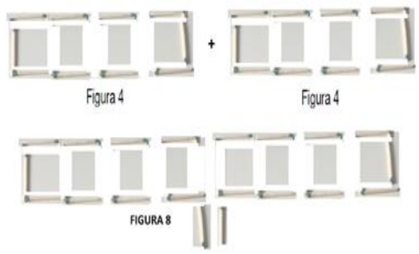
POSSÍVEIS SOLUÇÕES	ESTRATÉGIA DE GENERALIZAÇÃO	COMO O ALUNO POSSIVELMENTE “VÊ”
Desenhar os elementos da sequência e fazer a contagem dos palitos da borda.	**Contagem**: incide em Desenhar uma figura e contar seus elementos.	
A tabela seguinte relaciona o número da figura com o seu perímetro. Completa-a. Explique como pensou.	**Diferença recursiva (D_1):** Consiste em continuar a sequência com base na diferença entre dois termos consecutivos.	 *A figura 1 tem perímetro igual a 4* *A figura 2 tem perímetro igual a 4 + 2 = 6* *A figura 3 tem perímetro igual a 6 + 2 = 8* *A figura 4 tem perímetro igual a 8 + 2 = 10* *A figura 5 tem perímetro igual a 10 + 2 = 12* . . . *A figura 40 tem perímetro igual ao da figura 39 + 2*
Observar que o número de palitos da parte superior é igual ao número de palitos da parte inferior e que lateralmente terá sempre dois palitos, um de cada lado. Assim, para calcular a quantidade de palitos do perímetro, basta calcular duas vezes o nº da figura e adicionar 2, ou seja, 2.40 + 2 = 82	**Explícita (E):** descobre uma regra com base no contexto do problema, que permite o cálculo imediato do valor da variável dependente sendo conhecida a variável independente correspondente.	 *No perímetro da figura 1 tem 4 = 1.2+2 palitos* *No perímetro da figura 2 tem 6 = 2.2+2 palitos* *No perímetro da figura 3 tem 8 = 3.2+2 palitos* *No perímetro da figura 4 tem 10= 4.2+2 palitos* . . . *No perímetro da figura 40 tem 82= 40.2+2 palitos*

Fonte: autoria própria.

Como é o primeiro contato dos mesmos com esse tipo de atividade, o mais provável é que utilizem a estratégia da contagem ou a diferença recursiva (D_1) para chegar ao número de palitos do perímetro. O que não invalida a hipótese de observarem a relação existente entre o número da figura e a quantidade de palitos, desenvolvendo dessa forma a estratégia explícita (E).

Como a sequência escolhida para a atividade é de natureza visual, as estratégias TU_3 e D_3, vai implicar em um ajuste baseado no contexto do problema e, como assegurou Barbosa (2009), nem sempre é fácil para os alunos. No quadro seguinte apresentamos uma possível solução envolvendo tais estratégias.

Quadro 6: Possíveis soluções para a questão (c) do questionário envolvendo as estratégias: termo unidade com ajuste contextual e múltiplo da diferença com ajuste

POSSÍVEIS SOLUÇÕES	ESTRATÉGIA DE GENERALIZAÇÃO	COMO O ALUNO "VÊ"
Sabendo que a Figura 4 tem 10 palitos, usar a proporcionalidade e, em seguida o ajuste contextual. Assim, a figura 40 terá perímetro igual a: $10 \cdot 10 - 18 = 82$	**Termo unidade com ajuste contextual (TU_3):** Considerar um termo da sequência como unidade e usar múltiplos dessa unidade. É feito um ajuste do resultado tendo por base o contexto do problema.	 OBS: Toma como termo unidade a quantidade de palitos da figura 4. Depois usa a proporcionalidade fazendo o ajuste retirando os palitos sobrepostos. Ex. 2.10 tem 2 palitos sobrepostos 3.10 tem 4 palitos sobrepostos 4.10 tem 6 palitos sobrepostos 5.10 tem 8 palitos sobrepostos E assim sucessivamente... Nesse exemplo temos que a figura 20 terá 5.10 – 8 = 42
Observar que a diferença entre os termos consecutivos da quantidade de palitos de cada figura (4, 6,8,10,12,...) é dois e usá-lo como fator multiplicativo, fazendo o ajuste contextual que é a retirada dos dois palitos sobrepostos, ou seja, na figura 40 teremos: 2.82 - 2 = 82	**Diferença com ajuste (D_3):** Usa a diferença entre termos consecutivos como fator multiplicativo, ajustando o resultado.	 Ex.: A Figura 4 tem 10 palitos A figura 8 terá $2 \cdot 10 - 2 = 18$ A Figura 20 tem 42 palitos A figura 40 terá $2 \cdot 42 - 2 = 82$

Fonte: autoria própria

Nossa conjectura é que dificilmente os alunos desenvolverão esse tipo de estratégia ou, se o fizerem, não levarão em consideração o ajuste contextual, obtendo assim, uma resposta incorreta.

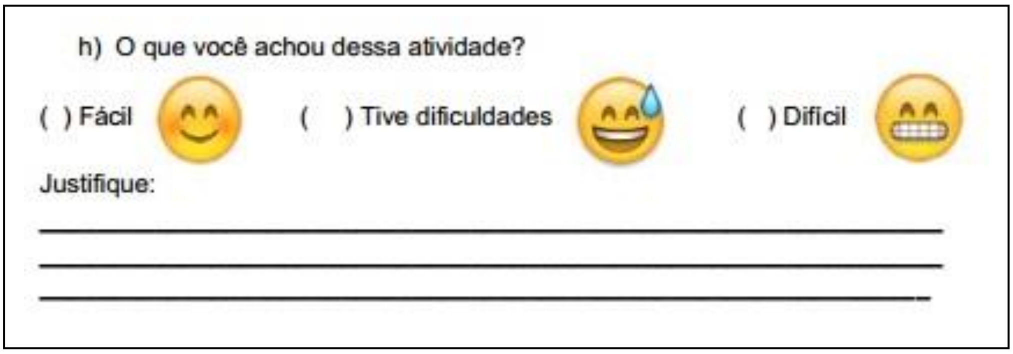
Por ser uma sequência de natureza visual, nossa hipótese é que não haverá resolução para o item (c) envolvendo as estratégias: termo unidade sem ajuste (TU_1), termo unidade com ajuste numérico (TU_2), múltiplo da diferença sem ajuste (D_2) e tentativa e erro (TE).

Vale ressaltar que com as estratégias de contagem (C) e recursiva (D_1), os alunos só conseguem desenvolver a generalização *próxima*. O esperado é que no item (d), os alunos consigam utilizar a estratégia explícita (E), permitindo que descubram uma regra para que os levem à generalização *distante e/ou* algébrica.

No item (e) pretendemos promover a reversibilidade do pensamento do aluno, procurando-se estabelecer a relação inversa da que tinha sido considerada nos itens anteriores, ou seja, dado o número de *palitos de fósforos* determinar o número da *figura*. Já a letra (f) pede para que escrevam uma regra que permita calcular o perímetro de qualquer figura. Para este item estamos prevendo que os alunos, mesmo que tenham percebido a regra, tenham dificuldades para expressá-la em linguagem natural, pois os mesmos não estão acostumados.

No item (g), pedimos para que escrevam uma expressão matemática. Não usamos o termo expressão algébrica, pelo fato dos alunos ainda não estarem familiarizados com a simbologia algébrica, principalmente no que diz respeito ao uso das "letras".

O item (h) da atividade teve como objetivo verificar a opinião dos alunos com relação à atividade, conforme mostra a figura seguinte:


h) O que você achou dessa atividade?

( ) Fácil ( ) Tive dificuldades ( ) Difícil

Justifique:

Figura 13: Item (h) do questionário
Fonte: autoria própria

Para o item (h), nossa expectativa é que as respostas variem entre "tive dificuldades" e "difícil", por ser o primeiro contato com a atividade, por não ter a interferência direta da professora/pesquisadora na hora da resolução e pela natureza visual da sequência que envolve também o conhecimento de perímetro.

Na sessão seguinte descreveremos como se deu a aplicação da atividade.

3.2.3 Procedimentos para coleta de dados

No dia 22 de agosto de 2017 os alunos levaram uma autorização para os responsáveis assinarem permitindo a participação dos mesmos na atividade. No dia seguinte, os alunos devolveram devidamente assinados.

A pesquisa foi realizada no dia 29 de agosto do mesmo ano, onde estavam presentes 28 alunos da turma, e teve duração de 100 minutos. A turma foi dividida em duplas, organizada cuidadosamente para que alunos que estivesse repetindo o 7º ano ficassem juntos, criando assim dois grupos: os que não tiveram contato com as “letras” e os que já tiveram. Em seguida, foram distribuídos as atividades e um envelope com alguns palitos de fósforo para cada dupla.

Após entrega do questionário, foi solicitado que colocassem o celular de um dos componentes da dupla para gravar os diálogos durante a realização da atividade. Em seguida, foi feito a leitura coletiva do enunciado da atividade. Nesse momento, relembramos o conceito de perímetro. Após a explicação, eles iniciaram a resolução das questões.

No decorrer da atividade os alunos me chamavam para tirar duvidas, por diversas vezes fiz a leitura do enunciado, mas solicitei que os mesmo lessem com mais atenção o que estava sendo solicitado, chamando atenção para eles escreverem as respostas nos protocolos e não nos cadernos ou ate mesmo carteiras.

À medida que iam concluindo as atividades, as mesmas foram sendo recolhidas e os diálogos das duplas salvas (apenas as que tiveram êxito ao gravar).

Portanto, essa pesquisa conta com um total de 14 questionários respondido que chamaremos de *protocolos* e que para análise dos dados, serão denominados de D1, D2, D3, D4, D5, D6, D7, D8, D9, D10, D11, D12, D13 e D14.

3.2.4 Técnica para análise dos dados

De acordo com Gil (2008, p. 156),

> A análise tem como objetivo organizar e sumariar os dados de forma tal que possibilitem o fornecimento de respostas ao problema proposto para investigação. Já a interpretação tem como objetivo a procura do sentindo mais amplo das respostas, o que é feito mediante sua ligação a outros conhecimentos anteriormente obtidos.

Iremos avaliar as respostas por questão, ou seja, avaliar todas as respostas do item (a), depois todas do item (b) e assim sucessivamente. Negrão (2006, apud Santos e Buriasco 2016) chama este procedimento de *análise horizontal*.

De acordo com Gil (2008, p. 157) “para que essas respostas possam ser adequadamente analisadas, torna-se necessário, organizá-las, o que é feito mediante o seu agrupamento em certo número de categorias”. Assim sendo, iremos procurar por respostas “que sejam comuns” e daí criar tais categorias.

A técnica utilizada para análise será a de *emparelhamento* ou associação, que para Fiorentini *et al* (2005) “consiste em analisar as informações a partir de um modelo teórico prévio”. Afirmam ainda que:

> Isso pode ser feito por intermédio de um emparelhamento ou associação entre o quadro teórico e o material empírico, verificando se há correspondência entre eles. O sucesso da análise dependerá da qualidade e da versatilidade do quadro e da grade de análise. (FIORENTINI E LORENZATO, 2009, p. 138 e 139).

Assim sendo, iremos fazer o emparelhamento entre as estratégias de generalização, segundo Barbosa (2010) e que são apresentados no quadro 1, com as respostas das duplas que constam no protocolo.

Para tal, elaboramos um quadro, cujo objetivo é preencher durante a análise e apresentar posteriormente, dando uma ideia mais sintetizada das estratégias utilizadas pelas duplas. Segue o modelo do quadro.

Quadro 7 Estratégias de Generalização, segundo Barbosa (2009), que podem ser mobilizados pelas duplas, em cada item do questionário.

QUESTÕES	DUPLAS												
	D1	D2	D3	D4	D5	D6	D7	D8	D9	D10	D11	D12	D13
a													
b													
c													
d													
e													
f													
g													

C: contagem; TU1: termo unidade sem ajuste; TU2: termo unidade com ajuste numérico; TU3: termo unidade com ajuste contextual; D1: diferença recursiva; D2: múltiplo da diferença sem ajuste; D3: múltiplo da diferença com ajuste; E: explícita e TE: tentativa e erro.

Fonte: autoria própria

O capítulo seguinte traz o resultado das análises realizadas mediante os 14 protocolos.

CAPÍTULO IV
ANÁLISE DOS DADOS

Neste capítulo, analisaremos os dados extraídos das respostas dadas pelas duplas de alunos[9], a cada item da atividade e identificaremos na mesma, o tipo de estratégia utilizada, para com isso responder a nossa questão de pesquisa.

Analise do item a

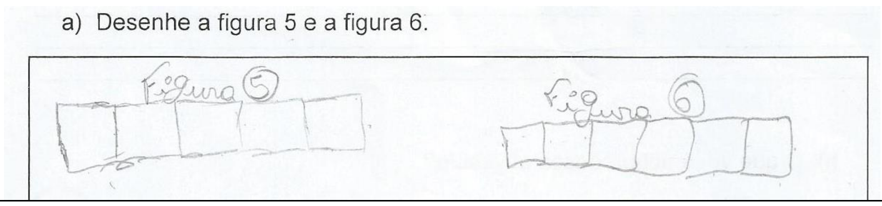
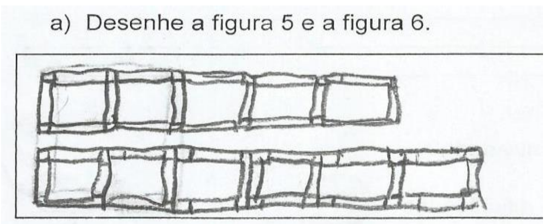
Ao analisar esse item, encontramos três tipos de respostas: as das duplas que apresentaram o desenho com sobreposição, o desenho sem sobreposição e as que fizeram o desenho incorreto. A seguir apresentaremos cada um deles.

<u>Desenhos com sobreposição</u>

Foram apresentados pelas duplas D1, D2, D3, D4, D5, D6, D7, D9, D10, D11, D12. Em todas essas duplas os alunos completaram a sequencia com as figuras 5 e 6 levando com consideração as figuras anteriores.

Diante das respostas, conjecturamos que as duplas usaram a estratégia de *contagem*, ou seja, utilizaram a representação visual e contaram seus elementos. Destacamos o protocolo da dupla D7, que ao desenhar, levou em consideração o contexto da sequencia, representando os palitos de fósforo. No quadro seguinte, apresentamos as respostas dadas pelas duplas D5 e D7.

Quadro 8: Imagens das respostas dos protocolos das duplas D5 e D7

Protocolo da dupla D5

Protocolo da dupla D7


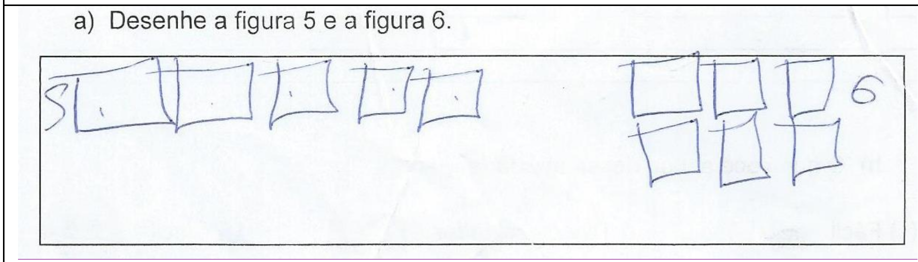
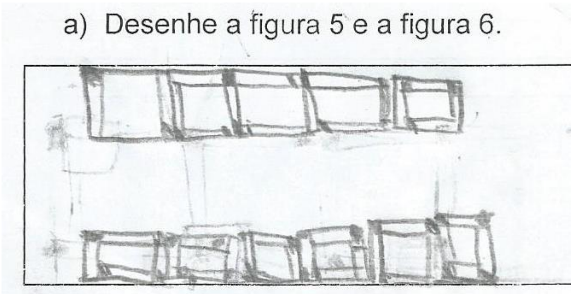
Fonte: Dados da pesquisa

[9] Identificadas como D1, D2, D3, D4, D5, D6, D7, D8, D9, D10, D11, D12, D13 e D14.

Desenho sem sobreposição

Apresentados nos protocolos das duplas D13 e D14. Estes alunos também mobilizaram a estratégia de *contagem*. Seguiram a sequencia, mas não levaram em consideração, que cada "quadrado" está compartilhando um palito. Assim, supomos que apesar de terem percebido um padrão, o mesmo não condiz com o da sequencia que está proposta na atividade, conforme pode ser visto no quadro seguinte.

Quadro 9: Imagens das respostas dos protocolos das duplas D13 e D14

Protocolo da dupla D13

Protocolo da dupla D14


Fonte: Dados da pesquisa

Nesses dois grupos de resposta, percebemos que as duplas estão no nível de *generalização próxima*, pois, os alunos descobriram (de acordo como visualizaram o padrão) dois termos muito próximo dos apresentados.

Desenho incorreto

Visto apenas no protocolo da dupla D8. Apesar dos alunos terem utilizado a estratégia de *contagem*, supomos que os mesmos não conseguiram identificar o padrão presente na sequencia dada, pois não fizeram a contagem correta dos palitos de cada termo da mesma.

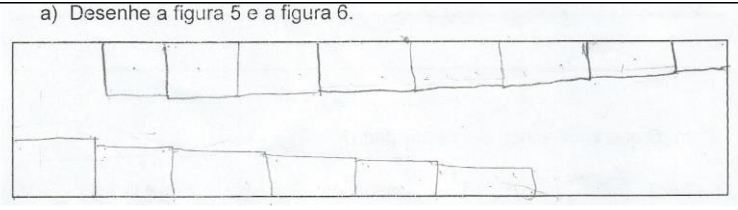


Figura 14: Imagem da resposta do protocolo da dupla D8.
Fonte: Dados da pesquisa

A seguir apresentaremos a anise do item b, no qual tinha o intuito de identificar como as duplas pensaram para responder o item a.

Analise do item b

Nessa seção apresentaremos as justificativas dos alunos para responder o item (a). Para isso, dividimos as respostas da seguinte maneira: identificou o padrão e justificou de forma coerente; identificou o padrão, mas não souberam justificar e não identificou o padrão.

<u>Identificou o padrão e justificou de forma coerente</u>

Visto nos protocolos das duplas D1 e D3. De acordo com as respostas dadas pelos alunos, consideramos que D1, apesar de não explicar com detalhes, apresenta uma justificativa que sugere que utilizaram a estratégia da *Diferença recursiva*, como ilustra a figura que segue:

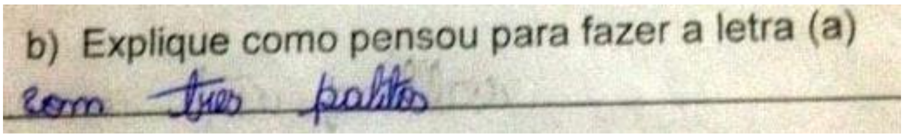


Figura 15: Imagem da resposta do protocolo da dupla D1.
Fonte: Dados da pesquisa

Com base na justificativa, acreditamos que a dupla foi sempre acrescentando três palitos para obter as figuras seguintes da sequencia.

Já a dupla D3, mostra indícios de que mobilizaram a estratégia *termo unidade sem ajuste*, pois, para construir a figura 5 e 6 da sequência, utilizam o "quadrado" do primeiro termo da sequência, como apresentado na figura seguinte:

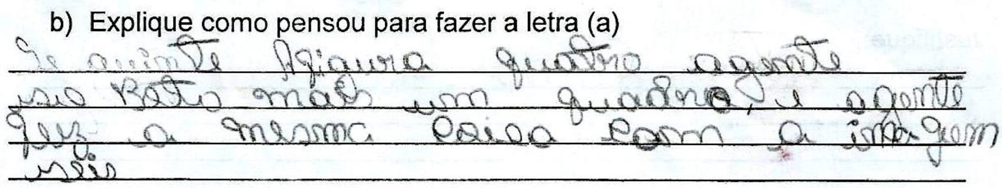


Figura 16: Imagem do protocolo da dupla D3
Fonte: Dados da pesquisa

Identificaram o padrão, mas não souberam justificar

Neste grupo, estão as duplas D2, D4, D5, D6, D7, D9, D10, D11, D12, D13 e D14. Apesar da resposta do item (a), sugerir que os mesmos identificaram um padrão, para continuar a sequencia, ao responderem o item (b), não conseguiram expressar uma justificativa que demonstre de forma coerente, como se deu a construção das figuras solicitadas, como mostra o quadro a seguir, no qual destacamos algumas respostas.

Quadro 10: Imagens das respostas dos protocolos das duplas D2, D9, D13 e D14.

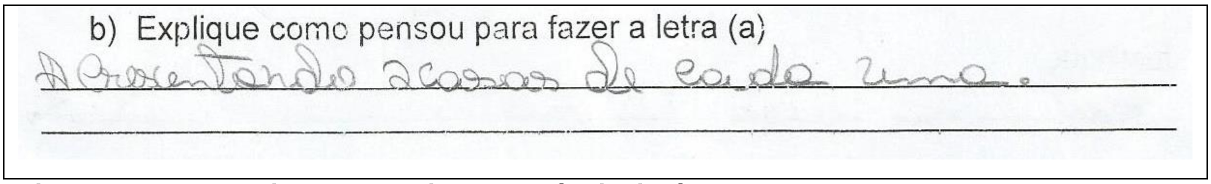
Protocolo da dupla D2
b) Explique como pensou para fazer a letra (a) Agente ficou olhando a figura acima aí consiguimos fazer
Protocolo da dupla D9
b) Explique como pensou para fazer a letra (a) Agente pegou o palito de fosforo e fez uma linha em contorno do palito formando um quadrado.
Protocolo da dupla D13
b) Explique como pensou para fazer a letra (a) Eu só contei os quadrados e era muito obvio
Protocolo da dupla D14
b) Explique como pensou para fazer a letra (a) Eu pensei em desenha palitos.

Fonte: Dados da pesquisa

Esse tipo de problema, qual seja, do aluno ter dificuldade para escrever o que está pensando, já é previsto nas pesquisas na área de educação matemática. Os discentes não estão habituados a justificar suas respostas, não desenvolvendo assim, as habilidades de expor claramente suas ideias.

Não identificou o padrão

Nessa categoria encontra-se apenas a dupla D8, cuja resposta está presente na figura que segue:


b) Explique como pensou para fazer a letra (a)

Acresentando 2 casas de cada uma.

Figura 17: Imagem da resposta do protocolo da dupla D8
Fonte: Dados da pesquisa

A justificativa dada pela dupla D8 indica que mobilizaram a estratégia da *contagem*, mesmo estando distante do que foi solicitado na questão. Por outro lado, ratifica a análise que fizemos da mesma no item (a), de que não houve identificação do padrão para a construção das figuras solicitadas. Além disso, reforça a dificuldade que tiveram, para justificar o pensamento, assim como ocorreu com as duplas da categoria anterior.

Vale ressaltar que tanto o item (a), como no item (b), os alunos estão utilizando estratégias de *natureza visual*, ou seja, para desenharem ou justificarem a construção das figuras 5 e 6, tiveram que "olhar" para as figuras 1, 2 e 3 da sequência dada.

Analisando as respostas dos itens (c), (d), (e), (f) e (g), dividimos as catorze duplas em dois grupos:

Grupo1: as duplas responderam tomando como base o número de palitos do perímetro, que estão as duplas D1, D2, D6, D9, D10, D11 e D12.

Grupo2: as duplas que responderam sem tomar como base o número de palitos do perímetro, que é formado pelas duplas D3, D4, D5, D7, D8 e D14.

Vale ressaltar que a dupla D13 não está presente em nenhum dos grupos, pois não respondeu dos itens (c) ao (g).

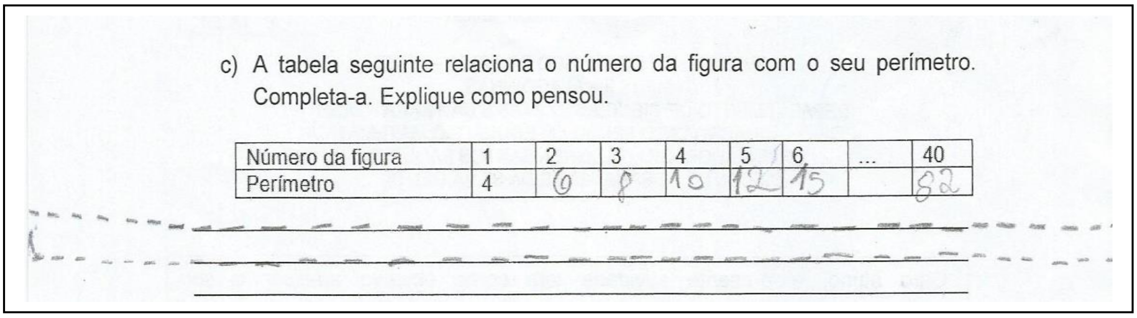
A partir daqui, iremos apresentar a análise dos itens levando em consideração os dois grupos supracitados.

Analise do item (c) do Grupo 1

No Grupo1, as duplas apresentaram respostas que condiziam com a quantidade de palitos do perímetro, porém sentimos a necessidade em de fazer uma nova divisão das duplas em três subgrupos, que são: as que responderam corretamente, as que erraram o número de palitos do perímetro da figura 40 e as que contaram sem sobreposição dos palitos.

<u>As duplas que responderam corretamente:</u>

As duplas D1 e D6 completaram a tabela corretamente, conforme pode ser visto na figura seguinte:


c) A tabela seguinte relaciona o número da figura com o seu perímetro. Completa-a. Explique como pensou.

Número da figura	1	2	3	4	5	6	...	40
Perímetro	4	6	8	10	12	15		82

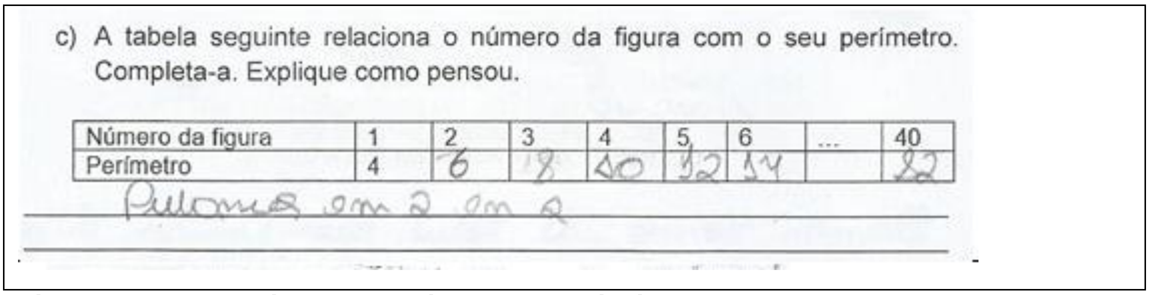
Figura 18: Imagem da resposta do protocolo da dupla D1
Fonte: Dados da pesquisa

Pela imagem, podemos perceber que a dupla D1 utilizou a estratégia de *contagem*, ao desenhar a quantidade de palitos da figura quarenta. O fato da dupla não ter desenhado todos os oitenta e dois palitos, mas ter apresentado a resposta correta dada na tabela, nos levou a conjecturar que tenham atingido o nível de uma *generalização distante*.

Acreditamos que os alunos tenham percebido que o número de palitos, tanto da parte superior, quanto da parte inferior, é igual ao número da figura, somado com os dois palitos laterais.

Ressaltamos ainda que a dupla D1 apresentou um erro no número de palitos da figura cinco. Nossa suposição é de que tenha sido um pequeno erro na contagem dessa figura, ou por falta de atenção.

Já a dupla D6 justificou sua estratégia com base na natureza não visual, como mostra a figura que segue:


c) A tabela seguinte relaciona o número da figura com o seu perímetro. Completa-a. Explique como pensou.

Número da figura	1	2	3	4	5	6	...	40
Perímetro	4	6	8	10	12	14		82

Pulamos em 2 em 2

Figura 19: Imagem da resposta do protocolo da dupla D6
Fonte: Dados da pesquisa

Pela imagem, podemos perceber que a dupla D6 utilizou a estratégia de natureza não visual que foi a *diferença recursiva*, ao escreverem: “pulamos em 2 em 2” a mesma mostrou que abandonou a componente visual e encontrou a figura quarenta com base nos números que havia completado a tabela.

Percebemos que a justificativa que D6 apresentou nesse item refere-se ao processo utilizado pela dupla para encontrar a figura quarenta, o que foi confirmado ao ouvir o áudio. Ao conversarem os alunos A e B da dupla D6 mostram que encontraram a figura quarenta da seguinte forma:

Aluno A: *a do quarenta não consegui não professora?*

Aluno B: *é para chegar até quarenta.*

Aluno A: *há rapaz! É de dois em dois, entendeu?!*

Aluno A: *o aumenta dois, dois, dois.*

Aluno B: *hum rum!*

Aluno A: *Entendi, entendi!*

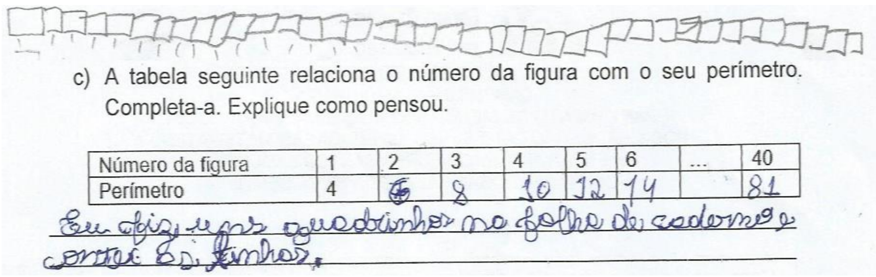
Aluno A: *agora de 6 vai para 7,8,9,10...40*

Aluno A: 14, 16, 18....

Percebemos com isso que essa dupla apresenta um nível de *generalização próxima*.

<u>As duplas que erraram o nº de palitos do perímetro da figura 40.</u>

Observada nas duplas D9 e D12. Percebemos que tanto uma quanto a outra, utilizaram a estratégia de natureza visual: a *contagem*. Porém, ao contar o número de palitinhos da figura quarenta, eles acabaram apresentando um erro, deixando de fora um palito, como ilustra a figura seguinte:



c) A tabela seguinte relaciona o número da figura com o seu perímetro. Completa-a. Explique como pensou.

Número da figura	1	2	3	4	5	6	...	40
Perímetro	4	6	8	10	12	14		81

Eu fiz uns quadrinhos na folha de caderno e contei 81 linhas.

Figura 20: Imagem da resposta do protocolo da dupla D9
Fonte: Dados da pesquisa

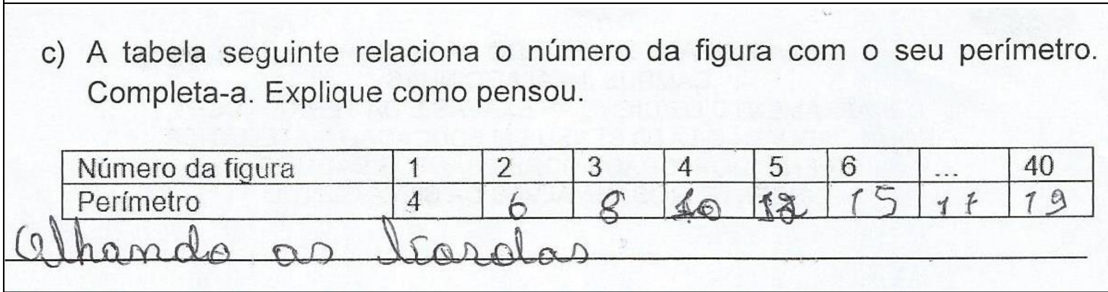
A figura 20 mostra que D9 esboçou o desenho da figura quarenta para fazerem a contagem. O mesmo aconteceu com a dupla D12. Isto nos levou a concluir que os mesmos, estão no nível da *generalização próxima*.

<u>As duplas que erraram o nº de palitos do perímetro a partir da figura 6.</u>

As duplas D2, D10 e D11 iniciaram completando a tabela corretamente, porém na figura 6 começam aparecer equívocos, como mostra o quadro a seguir.

Quadro 11: Imagens das respostas dos protocolos das duplas D2 e D10.

Protocolo da dupla D2

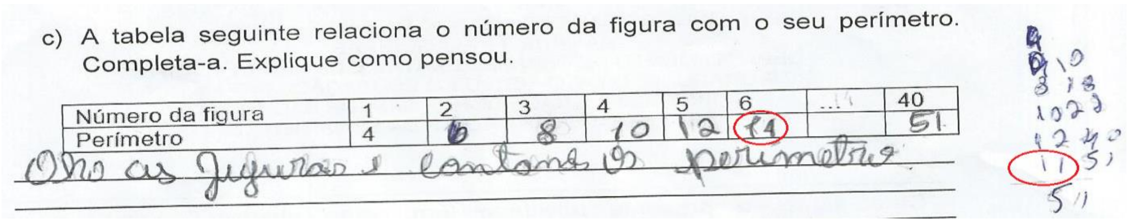


c) A tabela seguinte relaciona o número da figura com o seu perímetro. Completa-a. Explique como pensou.

Número da figura	1	2	3	4	5	6	...	40
Perímetro	4	6	8	10	12	15	17	19

Olhando as [illegible]

Protocolo da dupla D10



c) A tabela seguinte relaciona o número da figura com o seu perímetro. Completa-a. Explique como pensou.

Número da figura	1	2	3	4	5	6	...	40
Perímetro	4	6	8	10	12	14		51

Olho as figuras e contamos os perímetros

Fonte: Dados da pesquisa

Supomos que a dupla D2 cometeu um erro de contagem na questão 6, além disso, seguiu a sequencia como se o símbolo "..." fosse a figura sete e o numero quarenta fosse a figura oito, o que nos leva a crer que eles ainda não sabem o que significa o emprego desse símbolo em uma sequencia matemática.

Já a dupla D10 comete um erro que ficou confirmado na conta que eles fizeram ao lado da tabela. A princípio, achamos que eles haviam acertado, colocando 14, mas observando a conta, percebemos que ele deu como resposta 11 para o perímetro da figura seis. Além disso, achou que era para somar todos os resultados do perímetro da tabela para dar a resposta da figura quarenta.

Percebemos que apesar de estarem visualizando as figuras, os alunos dessas duplas demonstraram não conhecer o que significa o símbolo "..." em uma sequencia matemática.

Em relação ao nível de generalização das duplas dessa subdivisão concluímos como *próxima*.

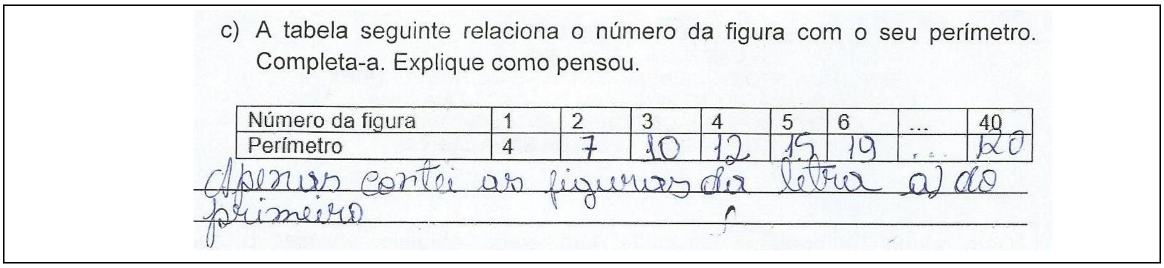
No Grupo1, percebemos que exceto pelas duplas D1 e D6, as demais estão apresentando resultados como os analisados por Barbosa (2009, p. 243), no qual,

Os participantes que apresentaram generalização próxima, quase sempre privilegiaram a estratégia de *contagem*.

Analise do item (c) do Grupo 2

<u>As duplas que contaram com sobreposição dos palitos:</u>

Presente nos protocolos D3, D4 e D5 os alunos apresentaram justificativas parecidas com a da dupla D4, como mostra a imagem a seguir:



c) A tabela seguinte relaciona o número da figura com o seu perímetro. Completa-a. Explique como pensou.

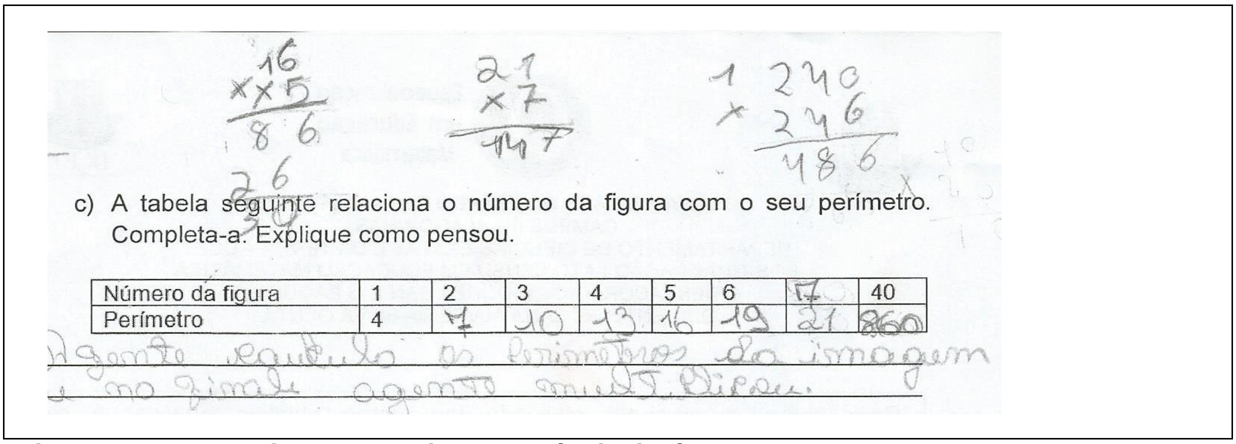
Número da figura	1	2	3	4	5	6	...	40
Perímetro	4	7	10	12	15	19	...	120

Apenas contei as figuras da letra a) do primeiro

Figura 21: Imagem da resposta do protocolo da dupla D4
Fonte: Dados da pesquisa

Podemos observar que eles utilizaram a estratégia de *contagem*, para completar a tabela até a figura de número seis da sequencia. Já para figura quarenta, eles não justificaram como encontrou, mas diante dos resultados acreditamos que eles multiplicaram o número da figura por três.

Porém, nos chamou atenção o resultado que a dupla D3 apresentou, para a quantidade de palito da figura de número quarenta, ilustrada a seguir:



c) A tabela seguinte relaciona o número da figura com o seu perímetro. Completa-a. Explique como pensou.

Número da figura	1	2	3	4	5	6	7	40
Perímetro	4	7	10	13	16	19	21	860

A gente calculo os perimetros da imagem e no final a gente multiplicou.

Figura 22: Imagem da resposta do protocolo da dupla D3
Fonte: Dados da pesquisa

É notório, que a dupla apresenta um resultado totalmente fora do padrão que ela estava seguindo para as figuras mais próximas da sequencia. Tentamos entender o que havia feito, mas as contas presentes no protocolo apresentam erros o que dificultou a analise.

Portanto, exceto pela dupla D3, as demais duplas desse subitem justificaram as quantidades de palitos da figura quarenta, utilizando a estratégia *diferença sem ajuste.* Pois, de acordo com a resposta, conjecturamos que usaram a diferença entre as quantidades de palitos de dois temos consecutivo da sequência, que seria 3, como fator multiplicativo sem aplicar um ajuste no final. Encontrando assim, 40 x 3 = 120 como mostra a figura 21.

Vale ressaltar ainda, que as duplas D4 e D5 apresentaram um pensamento análogo ao apresentado por Trevisane (2012) presente no quadro 3 desse trabalho. Daí, podemos dizer que elas abandonam a estratégia de natureza visual, utilizada para completar os primeiros números da sequencia e partiram para uma estratégia de natureza não visual.

<u>As duplas que contaram sem sobreposição dos palitos</u>

As duplas D7 e D14 os alunos fizeram a contagem dos palitos sem observar que na sequencia os “quadrados” estão compartilhando palitos como mostra o protocolo da dupla D7 a seguir:

c) A tabela seguinte relaciona o número da figura com o seu perímetro. Completa-a. Explique como pensou.

Número da figura	1	2	3	4	5	6	...	40
Perímetro	4	8	12	16	20	24	26	32

Somando o Contorno das Figuras

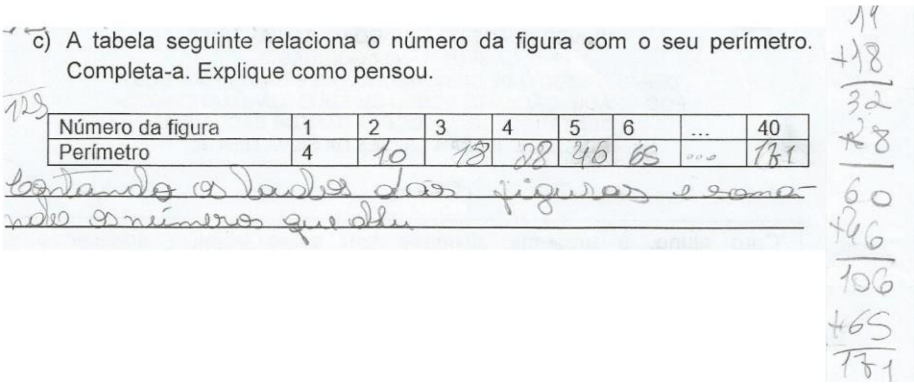
Figura 23: Imagem da resposta do protocolo da dupla D7
Fonte: Dados da pesquisa

Essa analise era esperada para dupla D14, pois ao responder o item (a) já demostrou um equívoco na visualização da sequencia (ver quadro 9). Porém, a dupla D7 apesar de responder o mesmo item levando em consideração o contexto do padrão, como ilustra o quadro 8, ao completar a tabela não levou em consideração o que que tinha observado ao desenhar as figuras solicitadas. Além disso, os alunos demonstraram não conhecer o significado do símbolo “...” em uma sequência numérica.

Com isso, ao analisar as resposta, percebemos que os alunos estavam utilizando a estratégia de *contagem* para completar a tabela, mas quando foi solicitada uma figura da sequência mais distante, os mesmos não conseguiram.

A dupla que respondeu errado:

Apresentado apenas no protocolo da na dupla D8, como mostra a figura a seguir.


c) A tabela seguinte relaciona o número da figura com o seu perímetro. Completa-a. Explique como pensou.

Número da figura	1	2	3	4	5	6	...	40
Perímetro	4	10	18	28	46	65	...	171

contando os lados das figuras e somando os números que deu

Figura 24: Imagem da resposta do protocolo da dupla D8
Fonte: Dados da pesquisa

Como a dupla não visualizou o padrão correto nos itens a e b, isso acabou se propagando no item c, apresentando uma justificativa de acordo como o que ele visualizou como padrão.

Percebemos também, que a dupla, assim como a dupla D10 do grupo anterior, achou que para encontra a quantidade de palitos da figura quarenta, bastava somar os resultados obtidos anteriormente. Portanto presumimos que, mesmo errando, dupla D8 utilizou a estratégia não visual a de *tentativa e erro*.

Com os resultados do item (c) podemos perceber que os alunos apresentaram dificuldades de interpretação e parece desconhecer alguns conteúdos matemáticos no âmbito da aritmética, confirmado a afirmação Gil (2008) ao dizer que “algumas barreiras se configuram na Álgebra pelo fato de o aluno trazer para o contexto algébrico dificuldades herdadas do aprendizado no contexto aritmético ou por estender para o estudo algébrico, procedimentos aritméticos que não procedem.” (GIL, 2008, p.36).

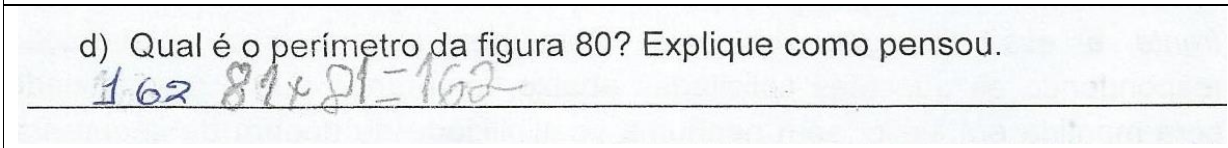
Analise do item (d) Grupo1

<u>Responderam corretamente</u>

As duplas D1, D9 e D12, acertaram a questão a como mostra o quadro a seguir.

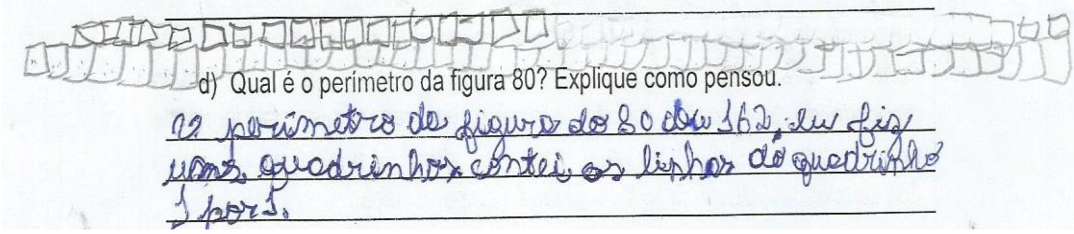
Quadro 12: Imagens das respostas dos protocolos das duplas D1, D9 e D12.

Protocolo da dupla D1


d) Qual é o perímetro da figura 80? Explique como pensou.

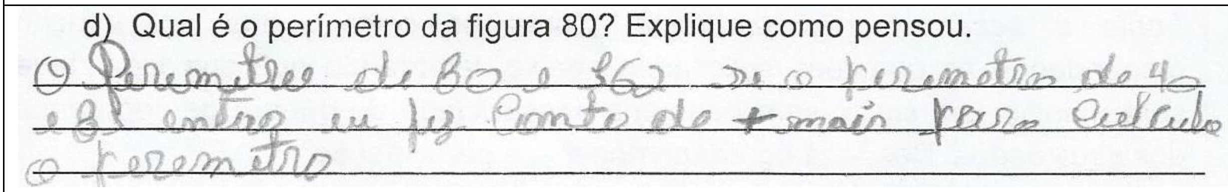
162 81+81=162

Protocolo da dupla D9


d) Qual é o perímetro da figura 80? Explique como pensou.

o perímetro da figura do 80 deu 162, eu fiz uns quadrinhos contei os linhas do quadrinho 1 por 1.

Protocolo da dupla D12


d) Qual é o perímetro da figura 80? Explique como pensou.

O Perímetro de 80 é 162 já o perímetro de 40 é 81 então eu fiz Conta de + mais para calcula o perímetro

Fonte: Dados da pesquisa

Como mostra a imagem, a dupla D1 e D12 tiveram o mesmo pensamento, tomaram como termo o perímetro da figura quarenta e dobrou o seu valor encontrando o perímetro da figura oitenta, o que caracteriza a utilização da estratégia de *termo unidade*. No entanto, a dupla D12 só acertou o perímetro porque cometeu um erro na contagem para encontrar o perímetro da figura quarenta. O que nos leva a presumir que se estivesse acertado, como ele não percebeu que a resposta precisava de um ajuste, ele certamente erraria a questão. Daí, o concluímos que D12 usou a estratégia de *termo unidade sem ajuste*.

Já na resposta da dupla D1 isso não ocorre. Como foi citado na analise do item (b), no subgrupo das duplas que responderam corretamente, a dupla D1 encontrou um modelo de resolução que permite encontrar qualquer figura, dai ele fez o ajuste necessário para responder a questão. Configurando assim, que essa dupla utilizou a estratégia de *termos unidade com ajuste contextual,* reforçando que a mesma está ao nível de generalização distante.

Observando o desenho no protocolo da dupla D9, percebemos que a mesma, utilizou a estratégia de *contagem.* Contando corretamente os palitos que fazem parte do perímetro da figura solicitada, mostrando com isso que está no nível de generalização próxima, pois recorreram a uma representação visual para responder a questão. Porém, as demais duplas abandonam a componente visual e utilizam apenas operação aritmética para responder a questão.

Responderam próximo da resposta correta

Nesse subitem estão as duplas D2, D6 e D10. A primeira e a última apresentaram como resposta 160 e 164, respectivamente e ambas justificaram utilizando a estratégia de *contagem*.

Já para dupla D6, recorremos ao áudio para entender a estratégia utilizada pela mesma, no qual os alunos desenvolveram o seguinte dialogo:

Aluno B: *qual o perímetro da figura oitenta?*
Aluno A: *então aqui éééé 82 mais 82*
Aluno B:*quanto é 8 mais 8?*
Aluno A: *16*
Aluno B: então 164

Diante do dialogo percebemos que eles utilizaram a estratégia de *termo unidade sem ajuste*, o que levou ao erro. Como presumido na metodologia, se os alunos utilizassem a estratégia de termo unidade teriam que ser o com ajuste, pois a componente visual do problema tem impacto na generalização.

Não responderam corretamente

Presente apenas na dupla D11. A mesma não justificou sua resposta, dizendo apenas: “o perímetro da figura oitenta é quarenta”, não deixando claro para analise qual estratégia utilizou.

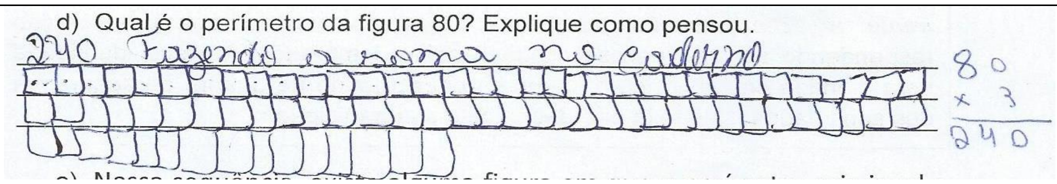
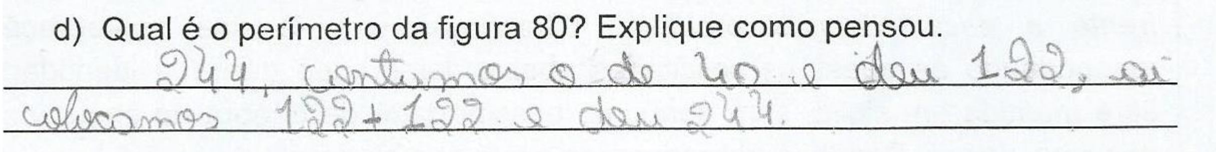
Analise do item (d) Grupo2

Ressaltamos que os alunos desse grupo não fizeram a contagem levando em consideração apenas os palitos dos perímetros. Então, a resposta correta para a figura oitenta, nesse grupo, seria 241. Diante da resposta, vimos que nenhuma dupla respondeu corretamente. Assim, dividimos a analise desse grupo em dois tipos de resposta as duplas responderam próximo da correta e as que responderam distante da correta.

<u>Responderam próximo da correta</u>

A D4 a dupla respondeu 240 e a dupla D5 respondeu 244. Conforme o quadro a seguir.

Quadro 13: Imagens das respostas dos protocolos das duplas D4 e D5.

Protocolo da dupla D4
 d) Qual é o perímetro da figura 80? Explique como pensou. 240 Fazendo a soma no caderno 80 x 3 240
Protocolo da dupla D5
 d) Qual é o perímetro da figura 80? Explique como pensou. 244, contamos o de 40 e deu 122, aí colocamos 122+122 e deu 244.

Fonte: Dados da pesquisa

Diante da imagem, podemos perceber que as duplas utilizaram estratégias diferentes. A dupla D4 utilizou a mesma estratégia utilizada para encontrar os palitos da figura quarenta, analisada no item (c), que foi a estratégia *múltiplo da diferença sem ajuste*. Percebemos também, que a resposta sugere que a dupla começou uma espécie de contagem mais verificamos e vimos que não condiz com a resposta.

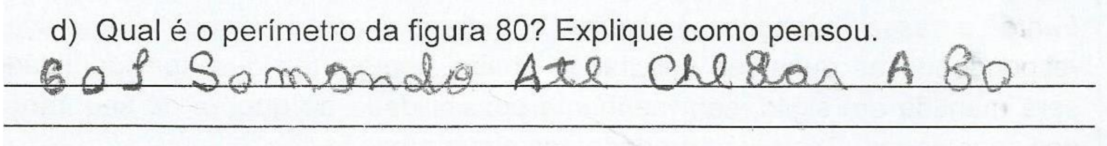
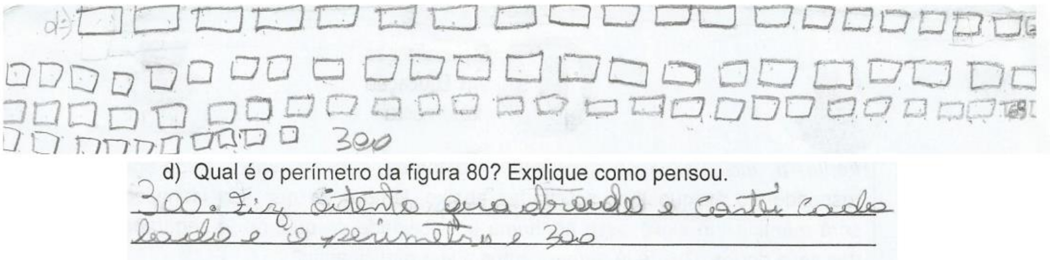
De acordo com a resposta presente no protocolo da dupla D5, ela toma como base a resposta da figura quarenta e dobra seu resultado, caracterizando com isso a utilização da estratégia de *termo unidade sem ajuste*.

<u>Responderam distante da correta.</u>

Foram as duplas de protocolos D3, D7 e D8. Nesse subgrupo, os alunos apresentaram respostas fora do contexto da questão, como mostra o quadro a seguir:

Quadro 14: Imagens das respostas dos protocolos das duplas D7 e D8.

Protocolo da dupla D7

 d) Qual é o perímetro da figura 80? Explique como pensou. 60 l Somando Ate Chegar A 80
Protocolo da dupla D8
 d) Qual é o perímetro da figura 80? Explique como pensou. 300. Fiz oitento quadrados e contei cada lado e o perímetro e 300

Fonte: Dados da pesquisa

A dupla D8 que apresentou uma forma de contagem, mas a resposta está muito distante da correta o que demostra que os alunos dessa dupla se perderam na contagem.

Analise do item (e)

A partir desse item, assim como a dupla D13, a dupla D14 não será mais analisada, pois os alunos dessa dupla não responderam a atividade do item e ao g.

Analise do item (e) Grupo1

Duplas que responderam sim

As duplas D2 e D12, apesar de estar no grupo das duplas que contaram os palitos de acordo com perímetro, não perceberam a regularidade mostrada na tabela, onde só apareceram números pares, o que nos levou a pensar que ou eles não tiveram atenção, ou possuem dificuldades em identificar números pares e ímpares.

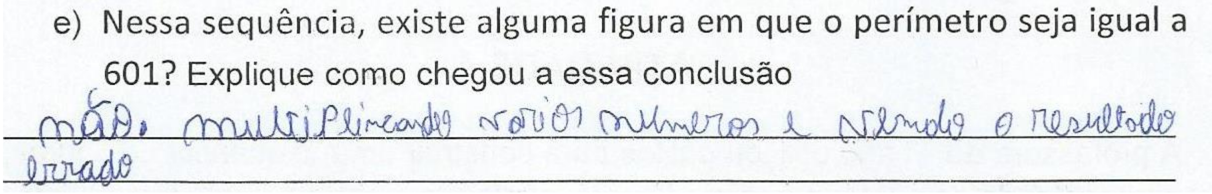
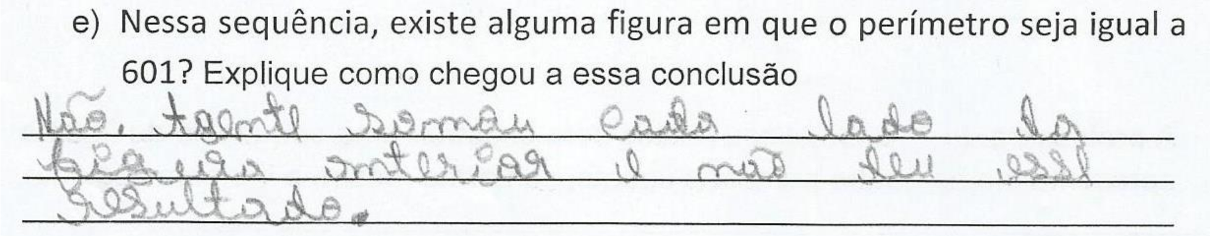
Duplas que responderam não

As duplas D1, D6, D9, D10 e D11 responderam não e acertaram a questão, pois uma vez que na sequencia o padrão, mostra que a quantidade de palitos do perímetro são número pares, seria impossível existir, nesse problema, uma figura com uma quantidade impar de palitos.

As duplas D9, D10 e D11 justificaram dizendo frase como: “não tem como dá” ou “por que o número é muito alto”, mas não apresentaram uma justificativa que demostrasse que eles realmente tentaram fazer essa questão e se utilizaram alguma estratégia.

Já as duplas D1 e D6 apresentaram uma justificativa que podemos caracterizar como a estratégia de *tentativa e erro*, como mostra a figura a seguir.

Quadro 15: Imagens das respostas dos protocolos das duplas D7 e D8.

Protocolo da dupla D1
 e) Nessa sequência, existe alguma figura em que o perímetro seja igual a 601? Explique como chegou a essa conclusão não. multiplicando vários numeros e sendo o resultado errado
Protocolo da dupla D6
 e) Nessa sequência, existe alguma figura em que o perímetro seja igual a 601? Explique como chegou a essa conclusão Não, agente somou cada lado da figura anterior e não deu esse resultado.

Fonte: Dados da pesquisa

Vale ressaltar, que a dupla D1 por apresentar um modelo de resolução, descrito nos item c e d, reforça nossa conjectura que os alunos dessa dupla realmente tentaram mostrar uma justificativa utilizando a estratégia de *tentativa e erro*. Como previa Barbosa (2009), na resolução questão 3 da atividade bilhetes de Joana (ver figura 2), pois assim como nessa questão o item (e) solicita das duplas um pensamento contrario as perguntas dos itens anteriores. Barbosa (2009) descreveu:

> Nesta tarefa, a utilização da tentativa e erro fará mais sentido após a identificação das condições do problema, ou seja, depois de ter sido interiorizada a forma como os *pioneses* se distribuem pelos lembretes. Na resolução da questão 3, que envolve a reversibilidade do pensamento, os alunos poderão experimentar sucessivos valores para os lembretes até atingirem o número pretendido de *pioneses*, tendo em conta a forma como estão distribuídos. Desta forma, as tentativas efetuadas não serão casuais, mas orientadas por condições específicas que os alunos descobriram previamente (Barbosa, 2009, p. 131).

Podemos perceber, de acordo com as analises feitas ate aqui, que a dupla D1 se destacou na utilização de varias estratégias de resolução e apresentou um pensamento condizente com o que estava sendo solicitado na questão.

Analise do item (e) Grupo 2

<u>Duplas que responderam sim</u>

Presente nos protocolos das duplas D4, D7 e D8. As mesmas pesar de responderem sim, que seria a resposta correta de acordo com esse grupo, não conseguiram apresentarem uma justificativa que mostrasse uma possível estratégia de resolução. Apresentado resposta como as que estão no quadro a seguir.

Quadro 16: Imagens das respostas dos protocolos das duplas D4 e D7.

Protocolo da dupla D4
e) Nessa sequência, existe alguma figura em que o perímetro seja igual a 601? Explique como chegou a essa conclusão Sim Por é possível chega a essa conclusão
Protocolo da dupla D7
e) Nessa sequência, existe alguma figura em que o perímetro seja igual a 601? Explique como chegou a essa conclusão Somando 20 vezes At. CHegar A 601

Fonte: Dados da pesquisa

Ao verificar os áudios dessa dupla vimos que os mesmos, também não discutiram muito sobre essa questão. O que nos levou a pensar que eles não sabiam como justificarem sua resposta.

<u>Duplas que responderam não</u>

As duplas D3 e D5 deram resposta como as apresentadas na figura 25, demonstrando que utilizaram a estratégia de *tentativa e erro*.

e) Nessa sequência, existe alguma figura em que o perímetro seja igual a 601? Explique como chegou a essa conclusão

não. multiplicando varios numeros e sendo o resultado errado

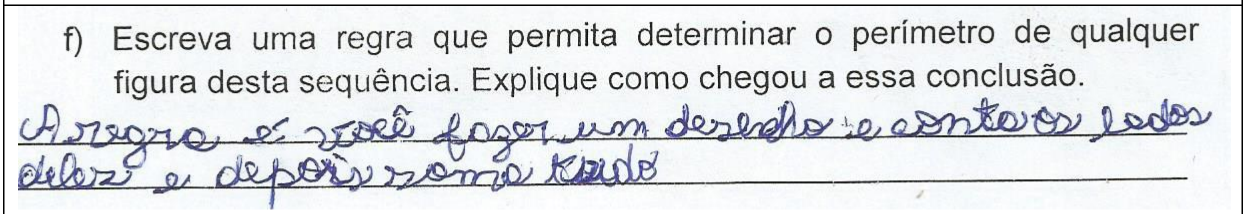
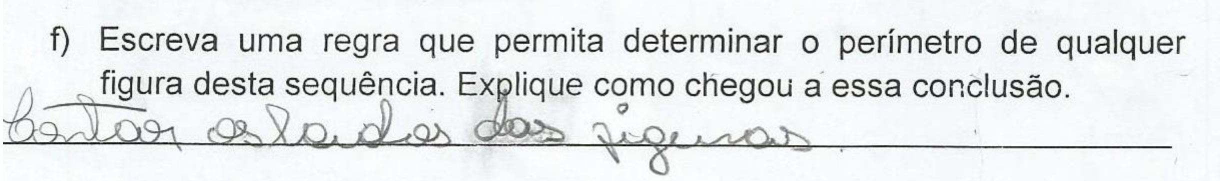
Figura 25: Imagem da resposta do protocolo da dupla D5
Fonte: Dados da pesquisa

Nas analises desse item podemos perceber as dificuldades que os alunos têm em se expressar ao justificar um pensamento ou resposta.

Analise do item (f) Grupo 1 e Grupo 2

No item (g), tanto os alunos do grupo1 (D1, D2, D6, D9, D10, D11 e D12) como do grupo 2 (D3, D4, D5, D7 e D8) deram respostas parecidas com a do protocolo D9 (exemplo do grupo 1) e a do protocolo D8 (exemplo do grupo 2), como mostra o quadro 17. O que nos levou a concluir que em ambos os grupos as duplas não conseguiram uma regra geral. Isso porque estão presos na estratégia de natureza visual que foi a de contagem (C).

Quadro 17: Imagens das respostas dos protocolos das duplas D9 (grupo1) e D8 (grupo2).

Protocolo da dupla D9
 f) Escreva uma regra que permita determinar o perímetro de qualquer figura desta sequência. Explique como chegou a essa conclusão. A regra é você fazer um desenho e contar os lados deles e depois somar tudo
Protocolo da dupla D8
 f) Escreva uma regra que permita determinar o perímetro de qualquer figura desta sequência. Explique como chegou a essa conclusão. Contar os lados das figuras

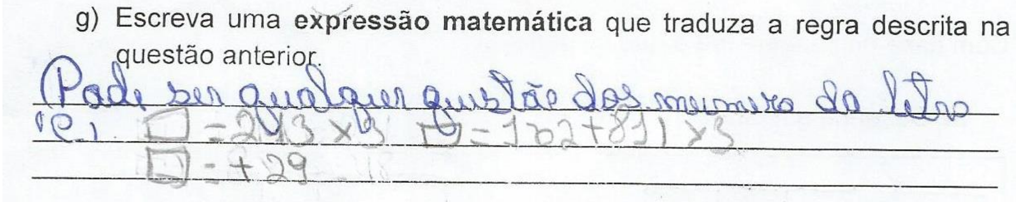
Fonte: Dados da pesquisa

Analise do item (g) Grupo 1

<u>Duplas que escreveram uma expressão matemática</u>

Apesar de expressão matemática poder ser tanto numérica como algébrica os alunos desse subgrupo só apresentaram uma expressão numérica. E a mesma, não traduz a resposta dada no item anterior.

Acreditamos que como a maioria da turma ainda não tiveram contato com a linguagem algébrica, como sinalizamos na metodologia, dificilmente eles apresentariam uma expressão com linguagem algébrica. Na figura a seguir está imagem do protocolo da dupla D11.


g) Escreva uma **expressão matemática** que traduza a regra descrita na questão anterior.

Pode ser qualquer questão dos numero da letra

e.) □ = 243 x3 □ = 102+831 x3

□ = +29

Figura 26: Imagem da resposta do protocolo da dupla D11
Fonte: Dados da pesquisa

Visualizamos que, os alunos ainda escrevem uma expressão como ensinado no fundamental I, assim podemos perceber o quanto é importante o aprendizado matemático nesse nível de escolaridade.

<u>Duplas que não escreveram uma expressão matemática</u>

As duplas D1, D2, D6 e D10, mostram que os alunos não sabem escrever uma expressão matemática. Escreveram coisas como: “pode ser um número da questão c” ou “multiplicação com perímetro” confirmando as dificuldades que possuem em demostrar uma linguagem simbólica

.

Grupo 2

De acordo com as respostas das duplas desse grupo (D3, D4, D5 e D7), podemos perceber que, além de não escreverem uma expressão matemática, não apresentaram uma resposta condizente com o que estava pedindo a questão.

Podemos concluir que as duplas pesquisadas, não estão no nível de generalizar algebricamente um problema matemático. O que já esperávamos, pois como dito anteriormente, os alunos além de não terem realizado atividades que explore padrão, eles ainda não tiveram contato com linguagem algébrica.

Analise do item h

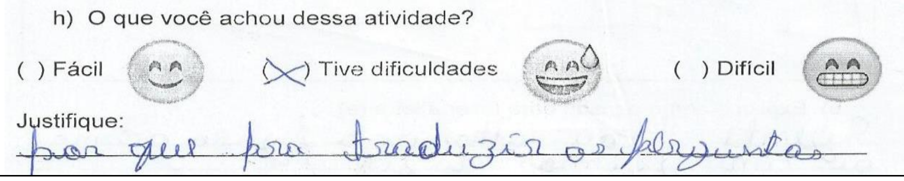
Finalizando a nossa analise horizontal, dividimos as respostas das duplas em dois: o grupo as duplas que marcaram “Tive dificuldade” e o grupo das duplas as que marcaram “Difícil”, pois nenhuma dupla sinalizou que a atividade foi fácil, confirmando assim, o que prevíamos no nosso processo metodológico.

Os que acharam difícil estão os protocolos das duplas D1, D4, D8, D13 e D14. O que justifica D13 e D14 não responderem a maioria das questões. As justificativas desse grupo foram muito parecidas apenas confirmaram que tiveram muitas dificuldades em resolver as questões.

No grupo tive dificuldade estão as duplas D2, D5, D6, D7, D9, D10, D11, e D12. Desse grupo destacamos as justificativas que chamou mais a nossa atenção, que foi às das duplas D2, D3 e D9 mostrada no quadro a seguir.

Quadro 18: Imagens das respostas dos protocolos das duplas D2, D3 e D9.

Protocolo da dupla D2

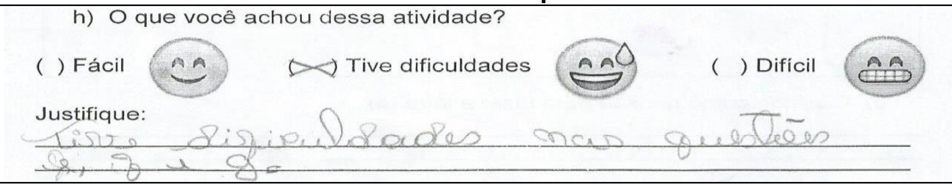


h) O que você achou dessa atividade?

( ) Fácil (X) Tive dificuldades ( ) Difícil

Justifique: por que pra traduzir as perguntas

Protocolo da dupla D3

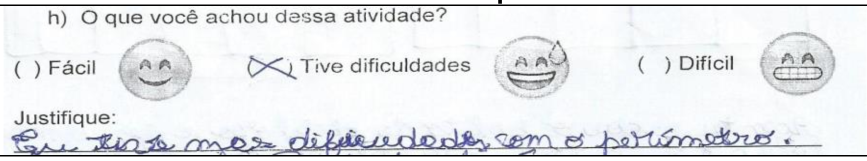


h) O que você achou dessa atividade?

( ) Fácil (X) Tive dificuldades ( ) Difícil

Justifique: Tive dificuldades nas questões [illegible]

Protocolo da dupla D9



h) O que você achou dessa atividade?

( ) Fácil (X) Tive dificuldades ( ) Difícil

Justifique: Eu tive mas dificuldades com o perímetro.

Fonte: Dados da pesquisa

As demais justificativas foram parecidas as das apresentadas no protocolo da dupla D3.

Podemos perceber que, a dupla D2 reforça a dificuldade que os alunos têm ao ler e interpretar o que está sendo solicitado na questão. Já dupla D9, mostra que apesar de estar no grupo dos alunos que contaram os palitos do perímetro corretamente, assim como o grupo 2, demostrou ter dificuldade no conceito de perímetro.

Portanto, na analise desse item podemos concluir que os alunos apresentaram várias dificuldades em realizar um problema que envolve padrão matemático. Prém, conseguimos identificar varias estratégias utilizadas pelos mesmos ao logo dessa atividade. Foi perceptível a predominância nas estratégias de natureza visual, mas também ocorreram estratégias de natureza não visual.

Com o intuito de termos um panorama das estratégias utilizadas, apresentaremos no quadro 19 o resumo das estratégias utilizadas pelas duplas nessa pesquisa.

Quadro 19: Estratégias de Generalização, segundo Barbosa (2009), que podem ser mobilizados pelas duplas, em cada item do questionário.

QUESTÕES	DUPLAS													
	D1	D2	D3	D4	D5	D6	D7	D8	D9	D10	D11	D12	D13	D14
A	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C
B	D_1	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C
C	C	C	C	D_2	D_2	D_1	C	TE	C	C	C	C	-	C
D	TU_3	C	C	D_2	TU_1	TU_1	C	C	C	C	-	TU_1	-	-
E	TE	-	TE	-	TE	TE	-	-	-	-	-	-	-	-
F	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	-	-
G	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-

Fonte: autoria própria

C: contagem; TU_1: termo unidade sem ajuste; TU_2: termo unidade com ajuste numérico; TU_3: termo unidade com ajuste contextual; D_1: diferença recursiva; D_2: múltiplo da diferença sem ajuste; D: múltiplo da diferenç$_3$a com ajuste; E: explícita e TE: tentativa e erro.

Observando o quadro, podemos perceber que como prevista nos trabalhos de Trevisane (2013), Barbosa (2009) e Pereira e Fernandes (2012) as duplas apresentaram uma predominância em utilizar estratégia de *contagem*, caracterizando que os alunos por diversas vezes tiveram que recorrer à visualização da figura para responder as questões.

Algumas duplas perceberam que nem sempre a contagem é uma estratégia fácil, principalmente quando se pretende determinar termos distantes de uma sequência, tornando sua busca exaustiva. Portanto, apesar destes alunos terem privilegiado a contagem na descoberta de termos próximos, alguns mudaram para outras estratégias com as: *termo unidade*, *múltiplo da diferença sem ajuste* e *diferença recursiva.*

Diante do quadro, podemos perceber que nenhuma dupla apresentou generalização algébrica, pois Radford (2008, apud Barbosa, 2009, p. 448) divide generalização algébrica em: *Factual* que é quando o foco da generalização mantém-se no plano concreto; *Contextual* quando a generalização é descritiva sendo utilizadas referências ao contexto e *Simbólica* A que quando a generalização é descrita em notação algébrica. O que não foi observado nos protocolos das duplas nessa pesquisa.

CAPÍTULO V
CONSIDERAÇÕES FINAIS

Nesse capítulo, apresento as minhas considerações finais de acordo com a metodologia e com as analises do capitulo anterior.

Na busca de analisar as estratégias utilizadas pelos alunos, ao resolver um problema de generalização de padrão, procuramos responder a nossa questão norteadora a qual foi: “quais as estratégias utilizadas por alunos do 7º ano da rede estadual de ensino, ao resolver um problema de generalização de padrão matemático?”. Para isso, com o intuito de alcançar o objetivo, bem como responder a nossa questão de pesquisa utilizamos como instrumento de coleta dos dados um questionário de caráter misto, que denominamos atividade. A pesquisa contou com a participação de 28 alunos de uma escola estadual na cidade de Salvador - Ba.

Enquanto observadora na pesquisa em *locus*, pude perceber que os alunos ao realizarem a atividade apresentaram dificuldades de interpretação da questão e ficou claro que ainda apresentavam dificuldades sobre conceito de perímetro. O que me levou a perceber que enquanto professora da turma, preciso sanar as duvidas referente a esse conteúdo. Com referencia ao nosso segundo objetivo que é o de “observar o envolvimento e o interesse dos mesmos diante da atividade” percebi uma movimentação diferente, pois alguns alunos que normalmente não realizam atividade demostraram um interesse maior, o que me motiva a trabalhar mais vezes com atividade dessa natureza.

Diante da analise do capitulo anterior, pude perceber que mesmo não tendo contato com conteúdos algébricos e até mesmo não terem tido a experiência com atividade com características de exploração de padrão, as duplas utilizaram seis tipos de estratégias, como podemos observar no quadro 19 no capítulo anterior.

Apesar da maioria das duplas utilizarem a estratégia de *contagem*, vimos uma frequência na estratégia *tentativa e erro*, seguida de *múltiplo da diferença sem ajuste* e de *termo unidade sem ajuste*. Pouquíssimos alunos utilizaram as estratégias de *diferença recursiva* e apenas uma dupla utilizou a estratégia de *termos unidade com ajuste contextual*. Não observamos a presença da estratégia *termo unidade com ajuste numérico* e *diferença com ajuste numérico*, o que já esparrávamos, pois como descrito na metodologia, como na atividade a sequencia escolhida possuía um padrão em que a componente visual influência na estratégia a ser utilizada, os alunos que tentasse utilizá-las cometeria erros. Diante do que eu foi exposto, podemos concluir que as estratégias utilizadas pelos alunos confirmam a nossa hipótese.

Assim, a pesquisa deixou evidente que incluir os alunos em um ambiente de investigação que explore padrão matemático são revelamos muitas estratégias de generalização, devolvendo com isso o pensamento algébrico. Além disso, sai dos modelos de atividades tradicionais, pautada na mecanização e repetição de exercício, o que desenvolve o interesse dos alunos nas aulas de matemática.

Vale ressaltar também, que a realização dessa pesquisa contribuiu muito na minha prática profissional, pois uma vez que fui apresentada a esse tipo de atividade, comecei a por em pratica, na escola em que trabalho, e os resultados estão sendo muito gratificante. Percebo um envolvimento muito grande dos alunos, muitos até comemoram quando descobrem a regra do padrão.

Eu, que sou apaixonada por álgebra, estou me sentindo muito feliz em dinamizar minhas aulas, trazendo uma proposta fora da mecanização e percebendo uma recepção positiva dos meus alunos, o que está contribuído muito para minha realização enquanto professora.

REFERÊNCIAS

BAQUEIRO, G. D. S. **Achados sobre generalização de padrão ao "garimpar" pesquisas brasileiras de educação matemática** *(2003-2013)*. Tese de Doutorado em Educação Matemática. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. 2016. São Paulo.

Barbosa, Ana Cristina Coelho. **A resolução de problemas que envolvem a generalização de padrão em contextos Visuais:** um estudo longitudinal com alunos do 2º ciclo do ensino básico. 2009. 484 f. Dissertação (doutorado em matemática elementar) – Instituto de Estudo da Criança, Universidade do Minho. Portugal, 2009. Disponível em: < https:// repositorium.sdum.uminho. pt/bitstream/1822/10561/1/tese.pdf> acesso em 13 ago. 2017.

BARBOSA, Ana. **Generalização de padrões em contextos visuais: um estudo no 6.º ano de escolaridade** . 2010. Portugal. Disponível em: <http://cmup.fc.up.pt/cmup/eiem/grupos/documents/19.Barbosa.pdf> acesso em 17 ago. 2017

BORRALHO, António. **Padrões e o desenvolvimento do pensamento algébrico.** In: XII CONFERENCIA INTERAMERICANA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA. 2011, Recife. Disponível em: < http://ciaem-redumate.org/ocs/index.php/xiii_ciaem/xiii_ciaem/paper/viewFile/1111/604> acesso em 13 de ago. 2017.

BORRALHO, António; BARBOSA, Elsa. **Pensamento Algébrico e exploração de Padrões.** 2009. Disponível em: <http://www.apm.pt/files/ Cd Borralho Barbosa4a5752d698ac2.pdf > Acesso em 20 ago. 2017.

BRASIL, **Parâmetros Curriculares Nacionais: terceiro e quarto ciclos do ensino fundamental: matemática.** Brasília, D. F: MEC/SEF, 1998. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/matematica.pdf> acesso em: 20 ago. 2017.

FIORENTINI, Dário; LORENZATO, Sergio. *Investigação em educação matemática: percursos teóricos e metodológicos*. 3ª ed. Revista, Campinas, SP: Autores Associados, 2009. – (Coleção formação de professores).

GIL, Antônio Carlos. **Como elaborar projetos de pesquisa**. 6ª edição. São Paulo: Atlas, 2008.

GIL, Antônio Carlos. **Como elaborar projetos de pesquisa**. 6ª edição. São Paulo: Atlas, 1991.

GIL, Katia Henn. **Reflexões sobre as dificuldades dos alunos na aprendizagem de Álgebra.** 2008. 120 f. Dissertação (mestrado em educação ciências e matemática)- Programa de pós-graduação em educação em ciências e matemática, Pontifícia Universidade Católica do rio grande do sul faculdade de física - PORTO ALEGRE, 2008. Disponível me: <http://repositorio.pucrs.br/dspace/bitstream/10923/2962/1/000401324-Texto+Completo-0.pdf> acesso em 13 ago. 2017.

LAKATOS, Eva Maria; MARCONI, Marina de Andrade. **Fundamentos de metodologia científica**. 7. Ed – São Paulo: Atlas, 2003.

OLIVEIRA, Silvânia Cordeiro de; LAUDARES, João Bosco**. Pensamento algébrico: uma relação entre álgebra, aritmética e geometria.** 2015. Disponível em: <http://www.ufjf.br/emem/files/2015/10/PENSAMENTO-ALG%C3%89BRICO-UMA-RELA%C3%87%C3%83O-ENTRE-%C3%81LGEBRA-ARITM%C3%89TICA-E-GEOMETRIA.pdf> acesso em 20 ago. 2017.

PEREIRA, Manuel de Sousa; FERNANDES, José António. Estratégias de generalização de padrões de alunos do 7º ano de escolaridade**. Revista Iberoamericana de Educación Matemática**, Portugal, n. 29, p. 85-108, março 2012.

PONTE, João Pedro da. **Números e álgebra no currículo escolar**. 2006. Disponível em: <http://repositorio.ul.pt/bitstream/10451/4525/1/06-Ponte%28Caminha%29.pdf> acesso em 20 jan. 2017.

SANTOS, Edilaine Regina dos e BURIASCO, Regina Luzia Corio de. A Análise da Produção Escrita em Matemática como Estratégia de Avaliação: Aspectos de uma Caracterização A Partir dos Trabalhos do GEPEMA. **Revista de Educação em Ciência e Tecnologia, Santa Catarina**, v.9, n.2, p.233-247, novembro 2016.
SCARLASSARI, Nathalia Tornisiello; MOURA, Anna Regina Lanner de. **Dificuldades em álgebra: Tradução Literal.** 2005. Disponível em: <http://www.ime.unicamp.br/erpm2005/anais/c4.pdf> acesso em 20 ago. de 2017.

TREVISANI Fernando de Mello, **Estratégias de generalização de padrões matemáticos.** 2013. 113 f. Dissertação (mestrado em educação matemática)- Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Rio Claro – SP, 2013. Disponível em: <http://www.rc.unesp.br/gpimem/downloads/dissertacoes/trevisani_fm_me_rcla.pdf > acesso em 23 ago. 2017

VALE, I.; BARBOSA, A.; FONSECA, L.; PIMENTEL, T. , BORRALHO, A.; CABRITA, I.; BARBOSA, E. **Padrões em matemática: uma proposta didática no âmbito do novo programa para o ensino básico**. Lisboa: Texto, 2011.

APÊNDICES

UNIVERSIDADE DO ESTADO DA BAHIA – UNEB
CAMPUS II – ALAGOINHAS
DEPARTAMENTO DE CIENCIAS EXATAS E DA TERRA – DCET
PÓS-GRADUAÇÃO LATO SENSU EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA
ORIENTADOR: GRACE DOREA SANTOS BAQUEIRO
DISCENTE: ROSANA ALVES DA SILVA GENTIL

"Caro aluno, a presente atividade tem como objetivo *analisar o seu envolvimento, interesse e, principalmente, as estratégias, utilizadas por vocês frente a essa situação problema*. Contamos com a sua colaboração respondendo às questões solicitadas abaixo, lembrando que sua identidade será mantida em sigilo, sem nenhuma possibilidade de quebra de segurança

ATIVIDADE

A professora do 7º ano utilizou palitos para construir uma sequência de figuras, apresentando as quatro primeiras figuras, conforme mostra a imagem seguinte.

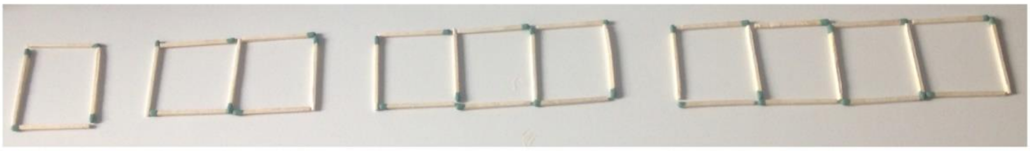


Figura 1 Figura 2 Figura 3 Figura 4

Fonte: autoria própria

Com base na imagem, dê o que se pede:

a) Desenhe a figura 5 e a figura 6.

b) Explique como pensou para fazer a letra (a)

c) A tabela seguinte relaciona o número da figura com o seu perímetro. Completa-a.

Número da figura	1	2	3	4	5	6	...	40
Perímetro	4							

Explique como pensou.

d) Qual é o perímetro da figura 80? Explique como pensou.

e) Nessa sequência, existe alguma figura em que o perímetro seja igual a 601? Explique como chegou a essa conclusão

f) Escreva uma regra que permita determinar o perímetro de qualquer figura desta sequência. Explique como chegou a essa conclusão.

g) Escreva uma **expressão matemática** que traduza a regra descrita na questão anterior.

h) O que você achou dessa atividade?

( ) Fácil  ( ) Tive dificuldades  ( ) Difícil 

Justifique: